

Résumé du cours de théorie des graphes

1 Notions de base

a) Vocabulaire

Définition. Un **graphe** est constitué :

- d'un ensemble fini de points appelés sommets,
- d'un ensemble fini de lignes, appelées arêtes; chaque arête relie deux sommets appelés ses extrémités.

Si les deux extrémités d'une arête sont égales, on dit que l'arête est une boucle.

Deux arêtes différentes peuvent avoir les mêmes extrémités.

Un **graphe simple** est un graphe sans boucle dans lequel deux sommets sont reliés par au plus une arête. Dans un graphe simple, une arête a est définie sans ambiguïté par ses extrémités s et s' , on note $a = ss'$.

Deux sommets sont **voisins** s'ils sont reliés par une arête.

Le **degré** du sommet s , noté $d(s)$, est le nombre d'arêtes dont s est une extrémité. Les boucles sont comptées 2 fois (une fois par extrémité).

Définition. Soit G un graphe. G' est un **sous-graphe** de G si G' est un graphe tel que les sommets de G' sont des sommets de G et les arêtes de G' sont des arêtes de G .

Le **sous-graphe engendré** par un ensemble de sommets S' est le sous-graphe de G dont les arêtes sont S' , avec toutes les arêtes possibles (c'est-à-dire toutes les arêtes de G dont les deux extrémités sont dans S').

Définition. Un **graphe orienté** est un graphe où chaque arête est orientée par une flèche. Une arête orientée va d'une extrémité initiale à une extrémité finale. Dans un graphe orienté, $d^+(s)$ est le nombre d'arêtes orientées ayant s comme extrémité initiale et $d^-(s)$ est le nombre d'arêtes orientées ayant s comme extrémité finale.

Dans la suite, les graphes sont non orientés sauf si on le précise.

b) Graphes isomorphes

Définition. Deux graphes simples G, G' sont **isomorphes** si on peut numéroter les sommets de G et G' par s_1, \dots, s_n de façon que :
 $s_i s_j$ est une arête dans $G \iff s_i s_j$ est une arête dans G' .

Propriété 1. Deux graphes isomorphes ont les mêmes propriétés : même nombre de sommets et d'arêtes, mêmes degrés, ...

Le **graphe complet** est le graphe simple à n sommets dont tous les sommets sont voisins. On le note K_n . Pour n fixé, ce graphe est unique (c'est-à-dire que deux graphes complets à n sommets sont isomorphes).

c) Théorème des poignées de mains

Théorème 2. Soit G un graphe, S l'ensemble de ses sommets et a le nombre d'arêtes de G . Alors la somme des degrés vérifie : $\sum_{s \in S} d(s) = 2a$. En particulier, la somme des degrés est toujours paire.

2 Chemins, connexité, distance

a) Chemins

Définition. Un **chemin** dans un graphe est une suite d'arêtes mises bout à bout, reliant deux sommets appelés les **extrémités** du chemin.

Quand le graphe est simple, un chemin est défini sans ambiguïté par la suite des sommets, et $s_0 s_1 \dots s_n$ désigne le chemin constitué des arêtes $s_0 s_1, s_1 s_2, \dots, s_{n-1} s_n$. Les sommets s_0 et s_n sont les extrémités de ce chemin.

Un chemin orienté (dans un graphe orienté) est une suite d'arêtes orientées telles que l'extrémité finale d'une arête est égale à l'extrémité initiale de l'arête suivant. Si s_1 est l'extrémité initiale du chemin orienté, et s_2 son extrémité finale, on dit que le chemin orienté va de s_1 à s_2 .

Définition. La longueur d'un chemin est égale au nombre d'arêtes qui le constituent. Un chemin est **fermé** si les deux extrémités sont égales. Une chemin est **simple** si toutes les arêtes du chemin sont différentes. Un chemin fermé simple est un **cycle**.

b) Connexité

Définition. Un graphe G est **connexe** si pour tous sommets distincts s_1 et s_2 , il existe un chemin d'extrémités s_1 et s_2 (dans un graphe orienté, on demande qu'il existe un chemin allant de s_1 à s_2). Si s est un sommet de G , la **composante connexe** de s dans G est le plus grand sous-graphe connexe de G contenant s .

Algorithme de connexité. C'est un algorithme pour trouver la composante connexe d'un sommet s_0 dans un graphe **non orienté** G .

On appelle "étiquette" une information qu'on ajoute à un sommet (en général on l'écrit sur le dessin, à côté du sommet).

- On met l'étiquette 0 au sommet s_0 .
- Étape 1 : on met l'étiquette 1 aux sommets différents de s_0 qui sont voisins à s_0 .
- Étape n : on met l'étiquette n aux sommets sans étiquette voisins à un sommet d'étiquette $n - 1$. On s'arrête quand, à l'étape n , il n'y a aucune étiquette n à mettre. La composante connexe de s_0 est le sous-graphe engendré par tous les sommets ayant une étiquette.

Pour savoir si un graphe est connexe : on applique l'algorithme de connexité à un sommet quelconque s . Le graphe est connexe si et seulement si la composante connexe de s est le graphe G tout entier.

Remarque. Cet algorithme appliqué à un graphe orienté ne donne pas la composante connexe de s_0 , il donne seulement les sommets qu'on peut atteindre par un chemin orienté partant de s_0 (l'existence d'un chemin orienté de s_0 vers s n'implique pas l'existence d'un chemin orienté de s vers s_0).

c) Distance

Définition. Soit G un graphe et s, s' deux sommets. La **distance** entre s et s' est la plus petite longueur d'un chemin d'extrémité s et s' . Dans un graphe orienté, la distance de s vers s' est la plus petite longueur d'un chemin orienté allant de s à s' .

Algorithme de distance. C'est le même que l'algorithme de connexité.

- Si on cherche la distance entre s_0 et s_1 , on applique l'algorithme à s_0 , on continue jusqu'à étiqueter s_1 .
- Si s_1 a l'étiquette n alors la distance entre s_0 et s_1 est n .
- Si l'algorithme s'arrête sans avoir rencontré s_1 , alors s_0 et s_1 ne sont pas dans la même composante connexe et la distance entre s_0 et s_1 n'est pas définie.

L'algorithme de distance marche aussi pour les graphes orientés : il donne la distance de s_0 vers s_1 (qui n'est pas nécessairement égale à la distance de s_1 vers s_0).

3 Cycles eulériens et hamiltoniens

a) Cycles et chemins eulériens

Définition. Dans un graphe, un **chemin eulérien** est un chemin qui contient une fois et une seule chaque arête du graphe. Un chemin eulérien fermé est appelé un **cycle eulérien**.

Théorème 3 (théorème d'Euler).

- Un graphe **connexe** a un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.
- Un graphe connexe a un chemin eulérien non fermé si et seulement si exactement 2 sommets sont de degré impair. Dans ce cas, ces 2 sommets sont les extrémités du chemin eulérien.

Construction d'un cycle eulérien quand tous les sommets sont de degré pair.

On va construire un cycle eulérien partant d'un sommet s_0 donné.

On construit un chemin simple (c'est-à-dire ne passant pas deux fois par une même arête) partant de s_0 . On prolonge le chemin autant que possible. Quand on ne peut plus prolonger le chemin, son extrémité finale est nécessairement s_0 , donc c'est un cycle. On l'appelle \mathcal{C} .

– Si \mathcal{C} contient toutes les arêtes de G : \mathcal{C} est un cycle eulérien, on a terminé.

– Sinon, soit G_1 le sous-graphe obtenu en retirant le cycle \mathcal{C} de G . On choisit un sommet s_1 commun à G_1 et à \mathcal{C} . On construit un chemin simple dans G_1 , partant de s_1 , et on le prolonge autant qu'on peut. Le chemin obtenu est un cycle \mathcal{C}' . On intercale le cycle \mathcal{C}' dans le cycle \mathcal{C} et on obtient un cycle \mathcal{C}_1 .

Si \mathcal{C}_1 contient toutes les arêtes de G , on a terminé. Sinon, on recommence (on retire le cycle \mathcal{C}_1 de G , etc).

G a un nombre fini d'arêtes, donc l'algorithme se termine.

A la fin, on obtient un cycle contenant toutes les arêtes de G , c'est-à-dire un cycle eulérien.

Construction d'un chemin eulérien quand il y a deux sommets s_1 et s_2 de degré impair :

On construit un chemin simple partant de s_1 et on le prolonge tant qu'on peut. L'extrémité finale de ce chemin est nécessairement s_2 . On retire du graphe le chemin construit, on obtient un sous-graphe G_1 dont tous les degrés sont pairs. Le reste de l'algorithme est identique au cas des cycles eulériens : on construit un cycle dans G_1 qu'on intercale dans le chemin de s_1 à s_2 , etc.

b) Cycles hamiltoniens

Définition. Soit G un graphe simple. Un **cycle hamiltonien** est un cycle passant une et une seule fois par tous les sommets de G (le sommet de départ et d'arrivée n'est compté qu'une fois).

Le graphe complet à n sommets ($n \geq 3$) a un cycle hamiltonien : les n sommets (dans l'ordre qu'on veut) forment un cycle hamiltonien.

Il n'existe pas d'algorithme efficace pour construire un cycle hamiltonien. Le théorème suivant donne une condition suffisante (mais pas nécessaire).

Théorème 4 (théorème de Dirac). Soit G un graphe simple à n sommets avec $n \geq 3$. Si pour tout sommet s , $d(s) \geq n/2$, alors il existe un cycle hamiltonien dans G .

4 Coloriage

a) Vocabulaire

Définition. Soit G un graphe simple. Un **coloriage** de G consiste à attribuer des couleurs aux sommets de manière que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur. Le **nombre chromatique** de G est le nombre minimum de couleurs nécessaires à son coloriage. On le note $\gamma(G)$.

Définition. Un sous-ensemble de sommets est **stable** s'il ne contient pas de sommets voisins.

Propriété 5. Si on a un coloriage de G , l'ensemble des sommets d'une couleur donnée est un sous-ensemble stable. C'est la même chose de se donner :

- un coloriage avec k couleurs,
- k sous-ensembles stables sans éléments communs dont la réunion est l'ensemble des sommets.

b) Encadrement du nombre chromatique

Il n'existe pas de formule ou d'algorithme efficace donnant le nombre chromatique à tous les coups. En général, on obtient un encadrement : $m \leq \gamma(G) \leq M$. Si $m = M$, on a trouvé $\gamma(G)$ (qui vaut $m = M$).

Propriété 6. Si H est un sous-graphe de G alors $\gamma(H) \leq \gamma(G)$; en particulier, si G contient un sous-graphe complet à k sommets alors $\gamma(G) \geq k$ (le nombre chromatique d'un graphe complet à k sommets est k).

Propriété 7. Si on a un coloriage de G avec k couleurs alors $\gamma(G) \leq k$.

Théorème 8. Si r est le maximum des degrés des sommets du graphe simple G , $\gamma(G) \leq r + 1$.

c) Algorithme de coloriage

– On classe les sommets de G de telle sorte que leurs degrés soient décroissants :

s_1, s_2, \dots, s_n avec $d(s_1) \geq d(s_2) \geq d(s_3) \dots \geq d(s_n)$.

– Étape 1 : on donne la couleur C1 au sommet s_1 . On parcourt la liste des sommets, dans l'ordre. Quand on rencontre un sommet non voisin à un sommet déjà colorié avec C1, on lui donne la couleur C1.

– Étapes suivantes : on donne une nouvelle couleur C au premier sommet de la liste non colorié. On parcourt la liste des sommets, dans l'ordre. Quand on rencontre un sommet non colorié et non voisin à un sommet déjà colorié avec C, on lui donne la couleur C.

On s'arrête quand tous les sommets sont coloriés. On a alors un coloriage de G .

Attention : cet algorithme donne souvent un bon coloriage, mais pas toujours un coloriage avec le moins de couleurs possible.

5 Automates

Définition. Un **automate** (ou automate fini déterministe) est un graphe orienté qui possède un sommet initial et un ou plusieurs sommets finaux, et dont toutes les arêtes ont une étiquette appartenant à un ensemble fini \mathcal{A} . De plus, de chaque sommet part une seule arête avec une étiquette donnée.

Convention. On indique le sommet initial par une flèche qui pointe sur ce sommet et dont l'extrémité initiale ne part d'aucun sommet (contrairement aux arêtes du graphe). On indique les sommets finaux en les entourant d'un double rond. En général, les sommets sont numérotés et entourés d'un rond.

Soit \mathcal{A} un ensemble fini de lettres (ou de chiffres). \mathcal{A} est appelé un **alphabet**, et les suites finies d'éléments de \mathcal{A} sont appelées des **mots**. Dans un mot, l'ordre des lettres compte ; des lettres peuvent être répétées.

Définition. Soit G un automate étiqueté par l'alphabet \mathcal{A} . On dit qu'un mot m est reconnu par G s'il existe un chemin orienté partant du sommet initial et arrivant à un sommet final, dont la suite des étiquettes des arêtes du chemin forment le mot m . L'ordre compte (les arêtes sont prises dans l'ordre du chemin et doivent donner les lettres du mot dans l'ordre).