Chapitre 4

Dualité

4.1 Problème dual

On suppose que A est une matrice de format $m \times n$ et $b \in \mathbb{R}^m$.

A chaque problème d'optimisation linéaire, nous allons définir un nouveau problème appellé le dual. Le problème original est le primal.

Soit le problème d'optimisation linéaire

$$\begin{array}{l} \min \quad z = c^t x, \\ Ax \geq b, \\ x \geq 0. \end{array} \tag{4.1}$$

Définition 4.1.1 Le dual du problème (4.1) est

$$\begin{array}{l} \max \quad z = b^t y, \\ A^t y \leq c, \\ y \geq 0. \end{array} \tag{4.2}$$

On notera que, pour le problème primal, on a $x \in \mathbb{R}^n$ tandis que $y \in \mathbb{R}^m$ pour le dual.

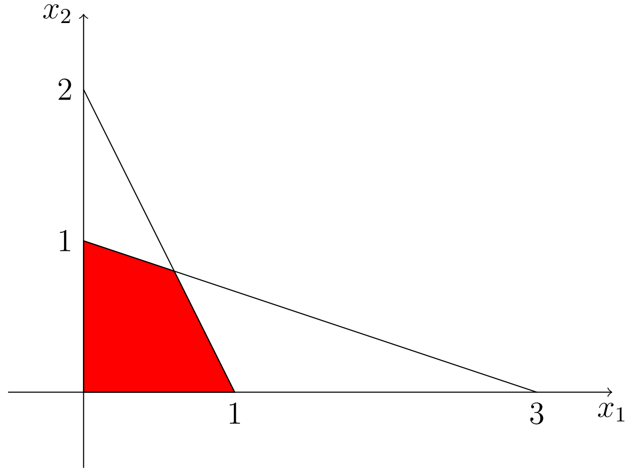
Par exemple, considérons le problème suivant

$$\min z = -x_1 - x_2$$

sous les contraintes

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -x_1 - 3x_2 & \geq & -3, \\ -2x_1 - x_2 & \geq & -2, \\ x_1, x_2 & \geq & 0. \end{array} \right.$$

qui admet la solution $(x_1, x_2) = (3/5, 4/5)$ et $z = -7/5$.



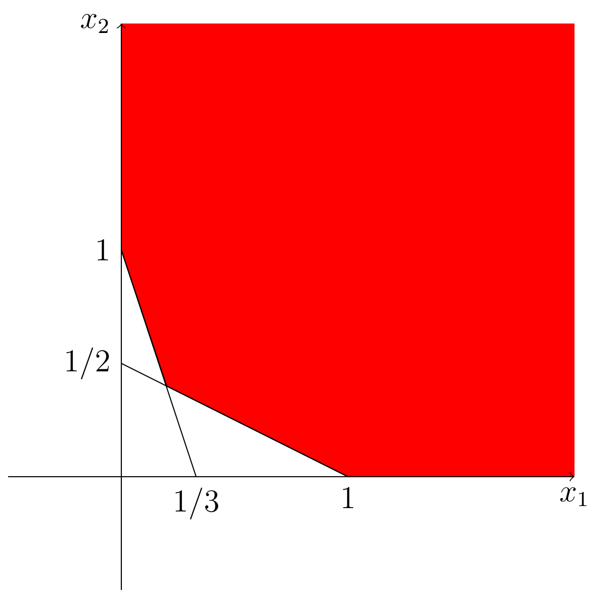
Le problème dual s'écrit sous la forme :

$$\max z = -3y_1 - 2y_2$$

sous les contraintes

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -y_1 - 2y_2 & \leq & -1, \\ -3y_1 - y_2 & \leq & -1, \\ y_1, y_2 & \geq & 0. \end{array} \right.$$

qui admet la solution $(y_1, y_2) = (1/5, 2/5)$ et $z = -7/5$.



Dans cet exemple, on observe que la valeur minimale du primal est égale à la valeur maximale du dual.

Essayons de dualiser d'autres types de problèmes.

(a) Evaluons le dual du problème

$$\begin{array}{l} \max \quad z = c^t x, \\ Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{array}$$

Pour cela il suffit de le réécrire sous la forme d'un problème de min :

$$\begin{array}{l} \max \quad c^t x, \\ Ax \leq b, \\ x \geq 0. \end{array} \iff \begin{array}{l} -\min \quad -c^t x, \\ -Ax \geq -b, \\ x \geq 0. \end{array}$$

Le dual sera

$$\begin{array}{l} -\max \quad -b^t y, \\ -A^t y \leq -c, \\ y \geq 0. \end{array} \iff \begin{array}{l} \min \quad b^t y, \\ A^t y \geq c, \\ y \geq 0. \end{array}$$

(b) Evaluons maintenant le dual du dual. Soit le problème

$$\begin{array}{l} \min \quad z = c^t x, \\ Ax \geq b, \\ x \geq 0. \end{array}$$

Le dual est

$$\begin{array}{l} \max \quad z = b^t y, \\ A^t y \leq c, \\ y \geq 0. \end{array}$$

On applique le résultat ci-dessus pour obtenir

$$\begin{array}{l} \min \quad z = c^t x, \\ (A^t)^t x \geq b, \\ x \geq 0. \end{array} \iff \begin{array}{l} \min \quad z = c^t x, \\ Ax \geq b, \\ x \geq 0. \end{array}$$

Donc, le dual du dual est le primal.

4.2 Interprétation économique

Considérons le problème d'une entreprise agricole qui désire ensemencer avec 3 variétés de plante A, B et C.
Il s'agit de déterminer les superficies x_i (en hectare) des terres ensemencées par les plantes A, B et C pour avoir un bénéfice maximal. Voici le tableau qui résume la situation

Terrain (ha)	Travail (h)	Machine (h)	Rendement
A	2	1	1100
B	3	2	1400
C	1	3	1500
340	2400	560	

Par exemple, il faudra 3 heures de travail par hectare pour ensemencer avec la plante B et 2 heures de machinerie. La dimension totale du terrain est de 340 ha et nous disposons de 2400 heures de temps de travail et de 560 heures en temps de machinerie. 1 hectare de la plante A donne un profit de 1100$.

La fonction objective est

$$\max z = 1100x_1 + 1400x_2 + 1500x_3$$

Contrainte 1 : dimension du terrain

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 340$$

Contrainte 2 : temps de travail

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 2400$$

Contrainte 2 : temps de machine

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 560$$

On ajoute les variables d'écart x_4, x_5, x_6 à ce problème et on applique la méthode du simplexe. Le tableau final est donné par

B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	0	-1	2	0	1	120
x_5	0	0	-3	-1	1	-1	1500
x_2	0	1	2	-1	0	1	220
	0	0	-200	-800	0	-300	$-440,000$

La solution est

$$x_1 = 120, x_2 = 220, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1500, x_6 = 0$$

et le profit est $z = 440,000$\$.

— On observe que les ressources de terrain et de machinerie sont pleinement utilisées car $x_4 = x_6 = 0$.
— Par contre, la ressource en temps de travail n'est pas pleinement utilisée car $x_5 \neq 0$.

Si on disposait d'un hectare ou d'une heure de travail ou de machinerie de plus, quel serait le profit de plus ? C'est le concept de coût marginal. Introduisons les variables

$y_1 =$ coût marginal de 1 ha de terrain
$y_2 =$ coût marginal de 1 h de travail

$y_3 =$ coût marginal de 1 h de machine

On devrait avoir $y_2 = 0$ car la ressource en temps de travail n'est pas pleinement utilisée.

Maintenant, regardons le point de vue d'un acheteur des activités de l'entreprise. Les coûts marginaux sont mieux interprétés de la manière suivante :

$y_1 =$ prix à offrir pour acheter un ha de terrain
$y_2 =$ prix à offrir pour acheter une h de travail
$y_3 =$ prix à offrir pour acheter une h de machine

Quel sera le problème à résoudre pour déterminer ces variables ?
La fonction objective correspond au coût à payer pour acheter l'entreprise

$$z = 340y_1 + 2400y_2 + 560y_3 = b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3 = b^ty.$$

Il s'agit de minimiser le prix à payer : $\min z = b^ty$.

Pour cela, son offre sera accepté s'il offre au moins autant que le bénéfice de chacune des activités.

Activité A : le bénéfice lié à l'ensemencement de la plante A est

$$y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1100.$$

Activité B : le bénéfice lié à l'ensemencement de la plante B est

$$y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 1400.$$

Activité C : le bénéfice lié à l'ensemencement de la plante C est

$$y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1500.$$

En résumé, le problème s'écrit

$$\begin{cases} \min \quad z = 340y_1 + 2400y_2 + 560y_3 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1100, \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 1400, \\ y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 1500, \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Le principe de la dualité peut s'énoncer de la manière suivante : le plus bas prix total à payer pour l'acheteur doit être égal au bénéfice maximal pour le producteur.

4.3 Théorie de la dualité

4.3.1 Lagrangien et point de selle

Soient $A \subset \mathbb{R}^n$ et $B \subset \mathbb{R}^m$ deux ensembles non vide et

$$L : A \times B \to \mathbb{R}$$

une fonction appellée Lagrangien.

Définition 4.3.1 Un point $(\bar{x}, \bar{y}) \in A \times B$ est un point de selle du Lagrangien L si

$$L(\bar{x}, y) \leq L(\bar{x}, \bar{y}) \leq L(x, \bar{y}) \qquad \forall x \in A, \quad \forall y \in B.$$

Exemple 4.3.1 Le point $(0,0)$ est un point de selle de la fonction $L(x,y) = x^2 - y^2$ avec $A = B = \mathbb{R}$ car

$$L(0, y) = -y^2 \leq 0 = L(0,0) \leq x^2 = L(x, 0) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Théorème 4.3.1 *Si $(\bar{x}, \bar{y})$ est un point de selle de L, alors*

$$\max_{y \in B} \min_{x \in A} L(x,y) = \min_{x \in A} \max_{y \in B} L(x,y) = L(\bar{x}, \bar{y})$$

Autrement dit, on peut inverser l'ordre du min et du max.
Démonstration: Montrons en premier que

$$\max_{y \in B} \min_{x \in A} L(x,y) \leq \min_{x \in A} \max_{y \in B} L(x,y).$$

En effet, on a que

$$\min_{x \in A} L(x,y) \leq L(x,y) \leq \max_{y \in B} L(x,y)$$

Le membre de gauche est une fonction de y seulement. De même, pour le membre de droite qui est une fonction de x uniquement. Ceci implique

$$\max_{y \in B} \min_{x \in A} L(x,y) \leq \max_{y \in B} L(x,y), \qquad \forall x \in A$$

et, en prenant le minimum par rapport à x,

$$\max_{y \in B} \min_{x \in A} L(x,y) \leq \min_{x \in A} \max_{y \in B} L(x,y),$$

d'où le résultat.

En deuxième, montrons que
$$\min_{x\in A}\max_{y\in B} L(x,y) \leq L(\bar{x},\bar{y}).$$
En effet, selon la définition du point de selle, on a

$$\max_{y\in B} L(x,y) = L(\bar{x},\bar{y}) \Longrightarrow L(\bar{x},\bar{y}) \geq \min_{x\in A}\max_{y\in B} L(x,y).$$

De même, on a

$$\min_{x\in A} L(x,y) = L(\bar{x},\bar{y}) \Longrightarrow L(\bar{x},\bar{y}) \leq \max_{y\in B}\min_{x\in A} L(x,y).$$

En recollant les morceaux, on obtient

$$L(\bar{x},\bar{y}) \leq \max_{y\in B}\min_{x\in A} L(x,y) \leq \min_{x\in A}\max_{y\in B} L(x,y) \leq L(\bar{x},\bar{y}),$$

d'où le résultat final.

■

4.3.2 Fonction indicatrice

Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble quelconque et non vide.

Définition 4.3.2 La fonction indicatrice de l'ensemble K est définie par

$$I_K(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in K, \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction indicatrice sert à enlever les contraintes. Pour un problème de minimisation, on a évidemment la relation
$$\min_{x\in K} f(x) = \min_{x} f(x) + I_K(x)$$

Pour un problème de maximisation, on a plutôt

$$\max_{x\in K} f(x) = \max_{x} f(x) - I_K(x)$$

Dans notre contexte de l'optimisation linéaire, on préfère ne pas enlever les contraintes de positivité $x \geq 0$. Ainsi les relations ci-dessus vont s'écrire

$$\begin{array}{c} \min \\ x \in K \\ x \geq 0 \end{array} \quad f(x) = \min_{x\geq 0} f(x) + I_K(x)$$

de même pour un problème de maximisation.

Appliquons cette technique au cas de l'optimisation linéaire :

$$\begin{aligned} &\min \quad z = c^t x, \\ &Ax \geq b, \\ &x \geq 0. \end{aligned}$$

Nous allons introduire la fonction Lagrangienne

$$L(x,y) = c^t x + y^t(b - Ax) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \forall y \in \mathbb{R}^m.$$

Le rôle de la fonction L est de transformer le problème d'optimisation linéaire sous la forme

$$\begin{aligned} &\min \quad c^t x \\ &Ax \geq b, \\ &x \geq 0. \end{aligned} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \min_{x\geq 0} \max_{y \geq 0} \; L(x,y) = \min_{x\geq 0} \max_{y\geq 0} \; c^t x + y^t(b - Ax)$$

Cela est possible grâce au résultat suivant.

Lemme 4.3.1 *La fonction indicatrice de $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ est donnée par*

$$I_K(x) = \max_{y \geq 0} y^t(b - Ax)$$

Démonstration: En effet, si $x \in K \Leftrightarrow Ax \geq b \Rightarrow b - Ax \leq 0$. Or $y \geq 0$, ce qui signifie que l'expression $y^t(b - Ax)$ est toujours négative. Donc le maximum sera 0.

Au contraire, s'il existe un indice i tel que $(Ax)_i < b_i \Rightarrow b_i - (Ax)_i > 0$. Prenons des y de la forme $(0, 0, \ldots, 0, y_i, 0, \ldots, 0)$ avec $y_i > 0$. Il est clair que $\max_{y\geq 0} y^t(b - Ax) = \infty$. ∎

De manière analogue, on a le résultat suivant pour un problème de maximum.

Lemme 4.3.2 *La fonction indicatrice de $K' = \{y \in \mathbb{R}^m \mid A^t\, y \leq c\}$ est donnée par*

$$I_{K'}(y) = -\min_{x \geq 0} x^t(c - A^t\, y)$$

Démonstration: La démonstration est tout à fait semblable. ∎

Théorème 4.3.2 *Théorème de la dualité (version faible)*

Si $Ax \geq b$, $x \geq 0$ et $A^t y \leq c$, $y \geq 0$, on a

$$b^t y \leq c^t x \qquad \forall x, y.$$

Autrement dit, la fonction objective du primal est toujours bornée inférieurement par $b^t y$ et cela pour tous les y vérifiant $A^t y \leq c$ et $y \geq 0$. De même, la fonction objective du dual est toujours bornée supérieurement par $c^t x$ pour tous les x vérifiant $Ax \geq b$ et $x \geq 0$.

DÉMONSTRATION: On a

$$\begin{aligned} c^t x = x^t c \geq x^t A^t y &= (Ax)^t y \\ &= y^t Ax \\ &\geq y^t b = b^t y \end{aligned}$$

■

Dans l'exemple du début du chapitre, le point $y = (y_1, y_2)$ avec $y_1 = 1/2$ et $y_2 = 1/2$ vérifie les contraintes. On a bien

$$b^t y = -3y_1 - 2y_2 = -5/2 \leq -7/5 = c^t x$$

pour le sommet $x = (3/5, 4/5)$ satisfaisant $Ax \geq b$ et $x \geq 0$.

Le théorème faible de la dualité implique

$$b^t y \leq c^t x \Longrightarrow b^t y \leq \min_x c^t x \Longrightarrow \max_y b^t y \leq \min_x c^t x$$

En fait, on a même égalité.

Théorème 4.3.3 *Théorème de la dualité (version forte)*

On a l'égalité

$$\begin{array}{lll} \min & c^t x = & \max \quad b^t y \\ Ax \geq b, & & A^t y \leq c, \\ x \geq 0. & & y \geq 0. \end{array}$$

De plus une des alternatives suivantes a lieu :

a) *Si un des problèmes primal ou dual admet une solution, alors l'autre problème admet aussi une solution.*

b) *Si un des problèmes primal ou dual n'admet pas une solution, alors l'autre problème n'admet pas de solution.*

DÉMONSTRATION: On va prouver seulement l'égalité ci-dessus. De plus, on supposera que le Lagrangien $L(x, y) = c^t x + y^t (b - Ax)$ possède un point de selle.

$$\begin{aligned}
\min_{\substack{Ax \geq b,\\ x \geq 0.}} c^t x &= \min_{x\geq 0} c^t x + I_K(x) \qquad \text{avec } K = \{Ax \geq b\},\\
&= \min_{x\geq 0} c^t x + \max_{y\geq 0} y^t(b - Ax) \qquad \text{grâce au Lemme 4.3.1,}\\
&= \min_{x\geq 0} \max_{y\geq 0} c^t x + y^t(b - Ax) \qquad \text{car } c^t x \text{ ne dépend pas de } y,\\
&= \max_{y\geq 0} \min_{x\geq 0} c^t x + y^t(b - Ax) \qquad \text{grâce au Théorème 4.3.1,}\\
&= \max_{y\geq 0} \min_{x\geq 0} b^t y + x^t(c - A^t y)\\
&= \max_{y\geq 0} b^t y + \min_{x\geq 0} x^t(c - A^t y) \qquad \text{car } b^t y \text{ ne dépend pas de } x,\\
&= \max_{y\geq 0} b^t y - I_{K'} \qquad \text{grâce au Lemme 4.3.2 et } K' = \{A^t y \leq c\}\\
&= \max_{\substack{A^t y \leq c,\\ y \geq 0.}} b^t y
\end{aligned}$$

■

4.3.3 Conditions d'optimalité

Donnons une caractérisation d'un point de selle $(\bar{x}, \bar{y})$ du Lagrangien

$$L(x, y) = c^t x + y^t(b - Ax) \qquad \forall x, y \geq 0$$

(1) On a que $L(\bar{x}, \bar{y}) \leq L(x, \bar{y})$ pour tous les $x \geq 0$. Ceci s'écrit

$$\begin{aligned}
& c^t\bar{x} + \bar{y}^t(b - A\bar{x}) \leq c^t x + \bar{y}^t(b - Ax)\\
\Longrightarrow \quad & c^t\bar{x} - \bar{y}^t A\bar{x} \leq c^t x - \bar{y}^t Ax\\
\Longrightarrow \quad & c^t(x - \bar{x}) - \bar{y}^t A(x - \bar{x}) \geq 0 \qquad \forall x \geq 0
\end{aligned}$$

Maintenant, si au lieu de prendre le point $x \geq 0$, on prend plutôt le point $\bar{x} + x \geq 0$. Donc on change $x \to \bar{x} + x$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad & c^t x - \bar{y}^t Ax \geq 0 \qquad \forall x \geq 0\\
\Longrightarrow \quad & x^t(c - A^t\bar{y}) \geq 0 \qquad \forall x \geq 0\\
\Longrightarrow \quad & c - A^t\bar{y} \geq 0
\end{aligned}$$

Donc, on obtient les conditions :

$$\bar{y} \geq 0 \qquad \text{et} \qquad A^t\bar{y} \leq c.$$

De plus, si on pose $x = 0$ dans l'expression $c^t(x - \bar{x}) - \bar{y}^t\ A(x - \bar{x}) \geq 0$ ci-dessus, on obtient

$$c^t(-\bar{x}) - \bar{y}^t\ A(-\bar{x}) \geq 0.$$

On fait de même avec $x = 2\bar{x}$, on obtient

$$c^t(\bar{x}) - \bar{y}^t\ A(\bar{x}) \geq 0.$$

Par conséquent, on a l'égalité

$$c^t(\bar{x}) - \bar{y}^t\ A(\bar{x}) = 0 \Longleftrightarrow \bar{x}^t(c - A^t\bar{y}) = 0.$$

(2) On a que $L(\bar{x}, y) \leq L(\bar{x}, \bar{y})$ pour tous les $y \geq 0$. Ceci s'écrit

$$\begin{aligned} & c^t\bar{x} + y^t(b - A\bar{x}) \leq c^t\bar{x} + \bar{y}^t(b - A\bar{x}), \\ \Longrightarrow \qquad & (\bar{y} - y)^t(b - A\bar{x}) \geq 0, \\ \Longrightarrow \qquad & (y - \bar{y})^t(A\bar{x} - b) \geq 0 \qquad \forall y \geq 0. \end{aligned}$$

Maintenant, si au lieu de prendre le point $y \geq 0$, on prend plutôt le point $\bar{y} + y \geq 0$. Donc on change $y \to \bar{y} + y$

$$y^t(A\bar{x} - b) \geq 0 \qquad \forall y \geq 0 \Longrightarrow A\bar{x} - b \geq 0.$$

Donc, on obtient les conditions :

$$\bar{x} \geq 0 \qquad \text{et} \qquad A\bar{x} \geq b.$$

Si on pose $y = 0$ dans l'expression $(y - \bar{y})^t(A\bar{x} - b) \geq 0$ ci-dessus, on obtient

$$(-\bar{y})^t(A\bar{x} - b) \geq 0.$$

Avec $y = 2\bar{y}$, on a

$$(\bar{y})^t(A\bar{x} - b) \geq 0.$$

Par conséquent, on a l'égalité

$$\bar{y}^t(A\bar{x} - b) = 0.$$

En conclusion on obtient les conditions d'optimalité aussi connues sous le nom de Karush, Kuhn et Tucker (KKT).

Théorème 4.3.4 *Conditions KKT*
Le point $(\bar{x}, \bar{y})$ est un point de selle du Lagrangien

$$L(x, y) = c^t x + y^t(b - Ax)$$

si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées

$$\bar{x} \geq 0, \quad A\bar{x} \geq b, \quad \bar{y} \geq 0, \quad A^t\bar{y} \leq c,$$

et les relations de complémentarité

$$\bar{x}^t(c - A^t\bar{y}) = 0 \qquad \text{et} \qquad \bar{y}^t(A\bar{x} - b) = 0.$$

Quel est le lien entre le point de selle $(\bar{x}, \bar{y})$ du Lagrangien

$$L(x, y) = c^t x + y^t(b - Ax) \qquad\qquad \forall x, y \geq 0$$

et les solutions des problèmes primal et dual ?

On a vu que

$$\begin{aligned} \min_{\substack{Ax \geq b, \\ x \geq 0.}} \; c^t x &= \min_{x \geq 0} \max_{y \geq 0} \; L(x, y) \\ &= L(\bar{x}, \bar{y}) \\ &= c^t\bar{x} + \bar{y}^t(b - A\bar{x}) \\ &= c^t\bar{x} && \text{car } \bar{y}^t(b - A\bar{x}) = 0. \end{aligned}$$

Donc, $\bar{x}$ est la solution optimale du problème primal.

De même, pour le dual, on a que

$$\begin{aligned} \max_{\substack{A^t y \leq c, \\ y \geq 0.}} \; b^t y &= \max_{y \geq 0} \min_{x \geq 0} \; L(x, y) \\ &= L(\bar{x}, \bar{y}) \\ &= c^t\bar{x} + \bar{y}^t(b - A\bar{x}) \\ &= b^t\bar{y} + \bar{x}^t(c - A^t\bar{y}) \\ &= b^t\bar{y} && \text{car } \bar{x}^t(c - A^t\bar{y}) = 0. \end{aligned}$$

Donc, $\bar{y}$ est la solution optimale du problème dual.

4.3.4 Relations de complémentarité

Interprétons les conditions KKT de la section précédente. Parmi ces relations, on a les deux relations d'égalités

$$\bar{x}^t(c - A^t\bar{y}) = 0 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \bar{y}^t(b - A\bar{x}) = 0 \tag{4.3}$$

Etudions la première relation de gauche. Nous savons déjà que $\bar{x} \geq 0$ et $c \geq A^t\bar{y}$ grâce aux conditions KKT. Ceci implique que

$$0 = \bar{x}^t(c - A^t\bar{y}) \geq 0 \Longrightarrow \bar{x}_i \left[c_i - (A^t\bar{y})_i\right] = 0 \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

D'autre part, la quantité $c_i - (A^t\bar{y})_i$ n'est rien d'autre que la valeur de la variable d'écart $\bar{y}_{m+i}$. Donc on obtient la relation dite de complémentarité

$$\bar{x}_i \, \bar{y}_{m+i} = 0, \qquad\qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Ceci s'interprète de la manière suivante :

$$\bar{x}_i = 0 \qquad \text{ou} \qquad \bar{y}_{m+i} = 0, \qquad\qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

De manière équivalente, on peut aussi dire :

- Si $\bar{x}_i > 0$, on doit avoir $\bar{y}_{m+i} = 0$.
- Si $\bar{y}_{m+i} > 0$, on doit avoir $\bar{x}_i = 0$.

De même, pour la seconde relation de droite de (4.3). Nous avons que $\bar{y} \geq 0$ et $A\bar{x} \geq b$. Ceci implique que

$$0 = \bar{y}^t(A\bar{x} - b) \geq 0 \Longrightarrow \bar{y}_i \left[A\bar{x})_i - b_i\right] = 0 \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, m$$

D'autre part, la quantité $(A\bar{x})_i - b_i$ n'est rien d'autre que la valeur de la variable d'écart $\bar{x}_{n+i}$. Donc on obtient une autre relation de complémentarité

$$\bar{y}_i \, \bar{x}_{n+i} = 0 \qquad\qquad \forall i = 1, 2, \ldots, m.$$

Ceci s'interprète de la manière suivante :

$$\bar{y}_i = 0 \qquad \text{ou} \qquad \bar{x}_{n+i} = 0, \qquad\qquad \forall i = 1, 2, \ldots, m.$$

ou, de manière équivalente,

- Si $\bar{y}_i > 0$, on doit avoir $\bar{x}_{n+i} = 0$.
- Si $\bar{x}_{n+i} > 0$, on doit avoir $\bar{y}_i = 0$.

Exemple 4.3.2 Prenons le problème

$$\min z = 340x_1 + 2400x_2 + 560x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1100, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 1400, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 1500, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

qui est de la forme
$$\begin{array}{ll} \min & c^t x. \\ Ax \geq b, & \\ x \geq 0. & \end{array}$$

Les données sont

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} 340 \\ 2400 \\ 560 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1100 \\ 1400 \\ 1500 \end{pmatrix}.$$

Les solutions optimales des problèmes primal et dual sont

$$\bar{x} = (800, 0, 300, 0, 0, 200)^t \qquad \bar{y} = (120, 220, 0, 0, 1500, 0)^t.$$

Vérifions les relations de complémentarité ($m = n = 3$) :

$$\begin{array}{l} \bar{x}_1 \, \bar{y}_4 = 800 \times 0 = 0, \\ \bar{x}_2 \, \bar{y}_5 = 0 \times 1500 = 0, \\ \bar{x}_3 \, \bar{y}_6 = 300 \times 0 = 0, \end{array}$$

et

$$\begin{array}{l} \bar{y}_1 \, \bar{x}_4 = 120 \times 0 = 0, \\ \bar{y}_2 \, \bar{x}_5 = 220 \times 0 = 0, \\ \bar{y}_3 \, \bar{x}_6 = 0 \times 200 = 0. \end{array}$$

4.4 Calcul de la solution du problème dual à partir du primal

Dans cette section, nous allons voir comment nous pouvons calculer la solution du problème dual à l'aide du tableau final du simplexe appliqué au problème primal. Nous allons donner deux exemples.
Considérons le problème suivant de type Diète

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad z = 340x_1 + 2400x_2 + 560x_3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 1100, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 1400, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 1500, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{array} \right.$$

Ce problème est du type

$$\begin{array}{ll} \min & c^t x \\ Ax \geq b & \\ x \geq 0 & \end{array} \iff \begin{array}{ll} \min & c^t x \\ -Ax \leq -b & \\ x \geq 0 & \end{array}$$

On applique la méthode du simplexe à partir de la formulation de droite à cause du signe $\geq \Longrightarrow \leq$. Après les Phases I et II, le tableau final obtenu est :

x_6	0	3	0	1	-2	1	200
x_3	0	1	1	1	-1	0	300
x_1	1	1	0	-2	1	0	800
	0	1500	0	120	220	0	-440000

La solution optimale sera

$$x = (800, 0, 300, 0, 0, 200) \Longleftrightarrow x_1 = 800, x_2 = 0, x_3 = 300, x_4 = 0, x_5 = 0, x_6 = 200.$$

Calculons la solution du problème dual. Le dual s'écrit

$$\begin{cases} \max \quad z = 1100y_1 + 1400y_2 + 1500y_3 \\ y_1 + y_2 + y_3 \leq 340, \\ 2y_1 + 3y_2 + y_3 \leq 2400, \\ y_1 + 2y_2 + 3y_3 \leq 560, \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Ce problème est du type

$$\begin{array}{lcl} \quad \max \quad b^t y & \Longleftrightarrow - & \quad \min \quad -b^t y \\ A^t y \leq c & & A^t y \leq c \\ y \geq 0 & & x \geq 0 \end{array}$$

On applique la méthode du simplexe à partir de la formulation de droite. Après la Phase II seulement (car $y = 0$ est réalisable), le tableau final est :

y_1	1	0	-1	2	0	-1	120
y_5	0	0	-3	-1	1	-1	1500
y_2	0	1	2	-1	0	1	220
	0	0	200	800	0	300	440000

La solution optimale sera

$$y = (120, 220, 0, 0, 1500, 0) \Longleftrightarrow y_1 = 120, y_2 = 220, y_3 = 0, y_4 = 0, y_5 = 1500, y_6 = 0.$$

On observe que la solution y se trouve à la dernière ligne du tableau final du simplexe du problème primal. En effet, les coefficients c_i de la dernière du tableau correspondent à

$$c_4 = y_1 = 120, c_5 = y_2 = 220, c_6 = y_3 = 0, c_1 = y_4 = 0, c_2 = y_5 = 1500, c_3 = y_6 = 0$$

En parfaite dualité, on a les mêmes relations par rapport au tableau du problème dual. On obtient que les coefficients c_i de la dernière du tableau du dual correspondent à

$$c_4 = x_1 = 800, c_5 = x_2 = 0, c_6 = x_3 = 300, c_1 = x_4 = 0, c_2 = x_5 = 0, c_3 = x_6 = 200.$$

Voici un autre exemple.

Exemple 4.4.1 Considérons le problème

$$\begin{cases} \min \quad z = 50x_1 + 80x_2 \\ 3x_1 \geq 6, \\ 2x_1 + 4x_2 \geq 10, \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 8, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Ce problème est du type

$$\begin{array}{ll} \min & c^t x \\ Ax \geq b & \\ x \geq 0 & \end{array} \iff \begin{array}{ll} \min & c^t x \\ -Ax \leq -b & \\ x \geq 0 & \end{array}$$

On applique la méthode du simplexe à partir de la formulation de droite à cause du signe $\geq \Longrightarrow \leq$. Après les Phases I et II, le tableau final obtenu est :

x_2	0	1	1/6	−1/4	0	3/2
x_1	1	0	−1/3	0	0	2
x_5	0	0	1/6	−5/4	1	7/2
	0	0	10/3	20	0	−220

La solution optimale sera

$$x = (2, 3/2, 0, 0, 7/2) \iff x_1 = 2, x_2 = 3/2, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 7/2.$$

Calculons la solution du problème dual. Le dual s'écrit

$$\begin{cases} \max \quad z = 6y_1 + 10y_2 + 8y_3 \\ 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 50, \\ 4y_2 + 5y_3 \leq 80, \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0. \end{cases}$$

Ce problème est du type

$$\begin{array}{ll} \max & b^t y \\ A^t y \leq c & \\ y \geq 0 & \end{array} \iff - \begin{array}{ll} \min & -b^t y \\ A^t y \leq c & \\ x \geq 0 & \end{array}$$

On applique la méthode du simplexe à partir de la formulation de droite. Après la Phase II seulement (car $y = 0$ est réalisable), le tableau final est :

y_1	1	0	−1/6	1/3	−1/6	10/3
y_2	0	1	5/4	0	1/4	20
	0	0	7/2	2	3/2	220

La solution optimale sera

$$y = (10/3, 20, 0, 0, 0) \Longleftrightarrow y_1 = 10/3, y_2 = 20, y_3 = 0, y_4 = 0, y_5 = 0.$$

On observe que la solution y se trouve à la dernière ligne du tableau final du simplexe du problème primal. En effet, les coefficients c_i de la dernière du tableau correspondent à

$$c_3 = y_1 = 10/3, c_4 = y_2 = 20, c_5 = y_3 = 0, c_1 = y_4 = 0, c_2 = y_5 = 0.$$

En parfaite dualité, on a les mêmes relations par rapport au tableau du problème dual. On obtient que les coefficients c_i de la dernière du tableau du dual correspondent à

$$c_4 = x_1 = 2, c_5 = x_2 = 3/2, c_1 = x_3 = 0, c_2 = x_4 = 0, c_3 = x_5 = 7/2.$$

Les relations de complémentarité sont aussi satisfaites :

$$x_i y_{m+i} = 0 \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

On a

$$\begin{aligned} x_1\ y_4 &= 2 \times 0 = 0, \\ x_2\ y_5 &= 3/2 \times 0 = 0. \end{aligned}$$

De même pour la seconde relation de complémentarité

$$y_i x_{n+i} = 0 \qquad \forall i = 1, 2, \ldots, m$$

On a

$$\begin{aligned} y_1\ x_3 &= 10/3 \times 0 = 0, \\ y_2\ x_4 &= 20 \times 0 = 0, \\ y_3\ x_5 &= 0 \times 7/2 = 0. \end{aligned}$$