Optimisation linéaire: Théorie

MTH8415

S. Le Digabel, École Polytechnique de Montréal

H2018

(v4)

Plan

Modèle d'optimisation linéaire (forme standard)

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n} \quad f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i & i \in \{1, 2, \dots, m\} \\ x_j \ge 0 & j \in \{1, 2, \dots, n\} \end{cases}$$

Peut être exprimé de façon matricielle :

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n} \quad f(x) = c^\top x$$

$$\text{s.c.} \quad \begin{cases} Ax \le b \\ x \ge 0 \end{cases}$$

avec $c \in \mathbb{R}^n$ (coûts), $b \in \mathbb{R}^m$ (membres de droite), et $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Tout modèle d'OL peut être mis sous forme standard

- Si l'objectif est de minimiser f, il suffit de maximiser $-f$.
- Une contrainte égalité peut être remplacée par deux contraintes inégalité.
- Une contrainte $\geq$ peut être remplacée par une contrainte $\leq$.
- Une variable sans bornes peut être remplacée par la différence de deux nouvelles variables non-négatives.

Quelques définitions

- Un point $x \in \mathbb{R}^n$ qui satisfait toutes les contraintes est tel que $Ax \leq b$ et $x \geq 0$. Il est appelé un point réalisable (ou admissible).
- La valeur d'un point x est la valeur $f(x)$.
- Une solution (ou solution optimale, ou optimum global) x^* est un point réalisable dont la valeur (optimale) est la plus grande possible. Autrement dit, il n'existe pas d'autre point réalisable y tel que $f(y) > f(x^*)$.
- Il peut y avoir plusieurs solutions optimales. On les trouve dans l'ensemble $\underset{Ax \leq b, x \geq 0}{\arg\max} f(x)$.
- On note $x^* \in \underset{Ax \leq b, x \geq 0}{\arg\max} f(x)$ ($\in$, pas $=$).

Trois possibilités

Pour tout modèle d'optimisation linéaire, une seule des trois options suivantes peut survenir :

1. Il existe au moins une solution optimale. Soit une, soit une infinité.
2. Le problème est non réalisable : Il n'est pas possible de satisfaire toutes les contraintes, i.e. le polyèdre formé par les contraintes est vide.
3. Le problème est non borné : Il n'a pas de valeur optimale finie.

Exemple de problème non borné

$$\max_{x_1,x_2} f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} -2x_1 + x_2 & \leq -1 \\ -x_1 - 2x_2 & \leq -2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

On peut poser $x_2 = 0$ et x_1 aussi grand que l'on veut pour obtenir $f = \infty$.

Illustration sur un exemple 2D

$$\max_{X,Y} 350X + 300Y$$

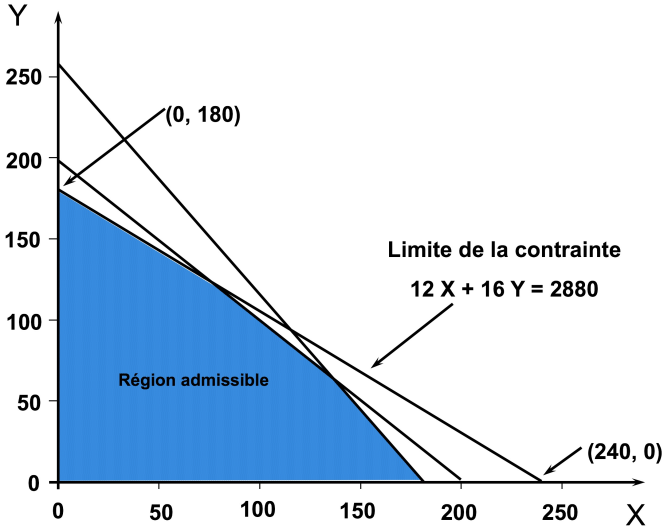
$$\text{s.c.} \begin{cases} X + Y & \leq 200 & (1) \\ 9X + 6Y & \leq 1566 & (2) \\ 12X + 16Y & \leq 2880 & (3) \\ X \geq 0 & & (4) \\ Y \geq 0 & & (5) \end{cases}$$

Interprétation graphique d'une contrainte

Considérons la contrainte (1) : $X + Y \leq 200$.

- La droite $X + Y = 200$ passe par les points (0,200) et (200,0) et divise le plan en 3 parties :
  - La partie au dessus de la droite correspond à l'ensemble des points tels que $X + Y > 200$.
  - La partie en dessous de la droite correspond à l'ensemble des points tels que $X + Y < 200$.
  - La partie sur la droite correspond à l'ensemble des points tels que $X + Y = 200$.
- La solution du problème sera en dessous ou sur la droite.
- Répéter ce raisonnement pour les 5 contraintes donne une région convexe appelée un polyèdre. Cette région correspond à l'ensemble des points réalisables.

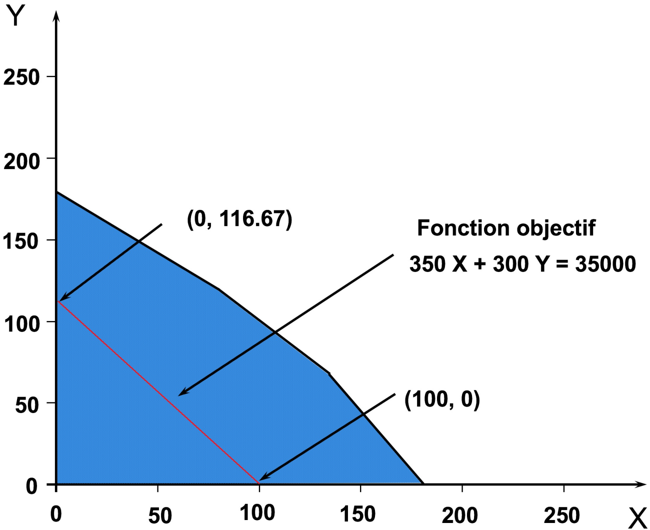
Polyèdre des contraintes



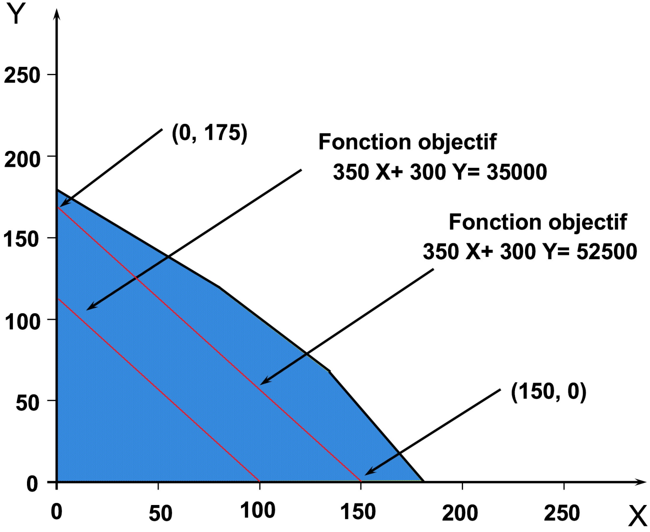
Interprétation graphique de l'objectif

- Considérons l'ensemble des points réalisables tels que :
  - $350X + 300Y = 35000.$
  - $350X + 300Y = 52500.$
  - $350X + 300Y = 66100.$
- Ce sont les courbes de niveau de l'objectif.
- Jusqu'à quelle valeur peut-on aller ?

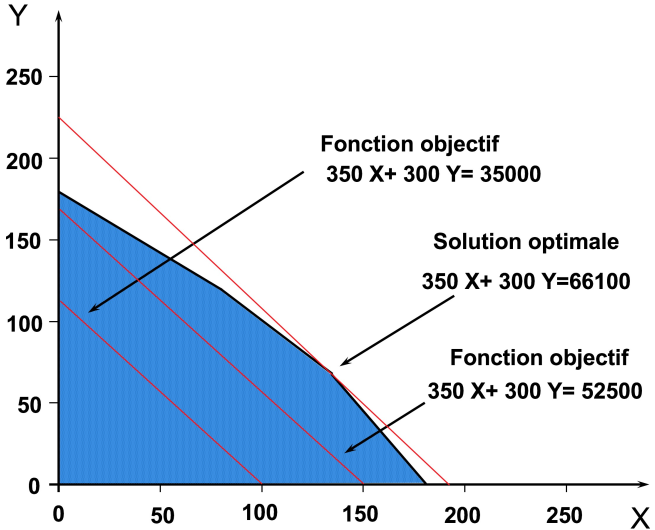
Courbes de niveau de l'objectif



Courbes de niveau de l'objectif



Courbes de niveau de l'objectif



Détermination de la solution

- On déduit des courbes de niveau que la solution optimale est située dans un "coin" de la région réalisable, à l'intersection de deux contraintes. Ce "coin" est appelé point extrême.
- Si un problème a au moins une solution optimale, l'une d'entre-elles est un point extrême.
- Il est possible de trouver une solution optimale en énumérant tous les points extrêmes.

Détermination de la solution (suite)

- Graphiquement, la solution est atteinte lorsque les contraintes (1) et (2) sont actives (i.e. satisfaites à égalité).
- Ceci donne le système à deux équations et deux inconnues suivant : $\begin{cases} X + Y & = 200 \\ 9X + 6Y & = 1566 \end{cases}$
- Dont la solution est le point extrême $(X^*, Y^*) = (122, 78)$. C'est la solution optimale du problème, qui donne la valeur optimale de 66100.

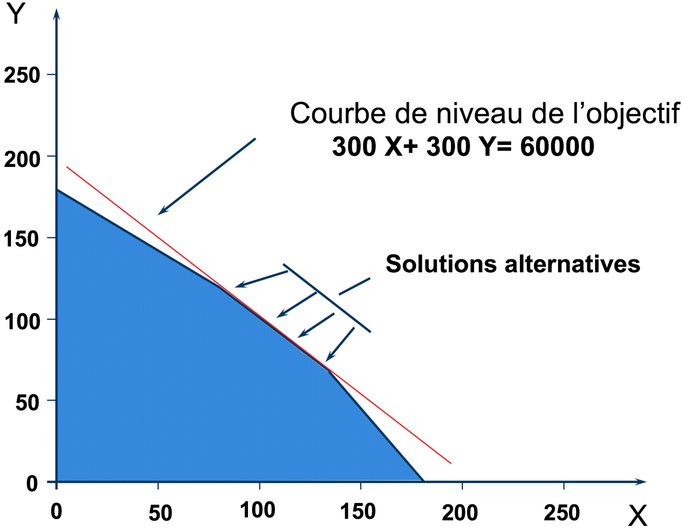
Plus d'une solution optimale

Si la fonction objectif avait été

$$300X + 300Y$$

- Le point $(122, 78)$ donne une valeur de 60000.
- Le point $(80, 120)$ donne une valeur de 60000.
- Il n'y a pas de meilleur point et il y a en fait beaucoup de points équivalents : $(90, 110)$, $(95, 105)$, $(100, 100)$, ... Il y en a une infinité !
- Ceci arrive car les courbes de niveau sont parallèles à la contrainte (1). Toutes les solutions optimales se retrouvent le long de cette contrainte, entre deux points extrêmes.

Infinité de solutions



Questions

Les 3 questions suivantes concernent l'analyse de sensibilité. On donne d'abord leur illustration, et la démarche sera détaillée dans la partie 4.

Question 1

Sachant que X et Y représentent des quantités de pompes de deux types, et que l'objectif est un profit, combien serions nous prêt à payer pour avoir une pompe supplémentaire ?

- Le mdd de la contrainte (1) passe de 200 à 201.
- La nouvelle solution optimale sera à l'intersection des droites : $X + Y = 201$ et $9X + 6Y = 1566$.
- Elle sera $(X^*, Y^*) = (120, 81)$ pour un nouveau profit optimal de 66300, soit 200$ de plus.
- Réponse : 200$.

Question 2

Combien serions nous prêt à payer pour avoir dix pompes supplémentaires ?

- La nouvelle solution optimale sera à l'intersection des droites : $12X + 16Y = 2880$ et $9X + 6Y = 1566$.
- $(X^*, Y^*) = (108, 99)$, pour un profit de 67500$ soit 1400$ de plus, mais on n'utilisera que 7 des 10 pompes, car $X^* + Y^* = 207$.
- Au delà de 7 pompes supplémentaires, on n'augmente plus le profit.

Question 3

En considérant que le profit s'exprime par $f(X, Y) = c_1 X + 300Y$, à partir de quelle augmentation de profit associé à X la solution actuelle ne sera plus optimale ?

- La solution optimale demeure la même tant que la fonction objectif n'est pas parallèle à la contrainte (2).
- $c_1/300 = 9/6$. Donc $c_1 = 450$.
- Pour $c_1 > 450$, la nouvelle solution optimale est $(174, 0)$.

En fait, la solution $(122, 78)$ reste optimale tant qu'elle est meilleure que ses points extrêmes voisins $(174, 0)$ et $(80, 120)$, ce qui donne $c_1 \in]300; 450[$.

Introduction

- Origine : George Dantzig, 1947.
- Un des 10 algorithmes du vingtième siècle selon *Computing in Science and Engineering*.
- Ne pas confondre avec *l'autre méthode du simplexe* en optimisation sans dérivées [Nelder and Mead, 1965].
- Algorithme itératif qui se déplace d'un point extrême à un autre. Chaque déplacement améliore la qualité de la solution, et si l'algorithme se termine, alors on a la garantie d'avoir un optimum global.

Illustration sur un exemple

$$\max_{x_1,x_2,x_3} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 & \leq 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 & \leq 8 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Variables d'écart

Trois nouvelles variables (d'écart), positives ou nulles (une par contrainte) permettent d'obtenir des contraintes égalité :

$$\max_{x_1,x_2,x_3,e_1,e_2,e_3} 5x_1 + 4x_2 + 3x_3$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 & +e_1 & = 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 & +e_2 & = 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 & +e_3 & = 8 \\ x_1, x_2, x_3, e_1, e_2, e_3 \geq 0 \end{cases}$$

Dictionnaire initial

$$
\begin{array}{rrrrr}
e_1 = & 5 & -2x_1 & -3x_2 & -x_3 \\
e_2 = & 11 & -4x_1 & -x_2 & -2x_3 \\
e_3 = & 8 & -3x_1 & -4x_2 & -2x_3 \\
\hline
z = & 0 & +5x_1 & +4x_2 & +3x_3
\end{array}
$$

- Ce dictionnaire est une façon de représenter le point réalisable $x = (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0)$ avec $f(x) = 0$ et $(e_1, e_2, e_3) = (5, 11, 8)$. Il s'agit d'un point extrême.
- Les variables en base e_1, e_2, et e_3 sont exprimées en fonction des variables hors-base x_1, x_2, et x_3.
- Dans le point courant, les variables hors-base sont toujours nulles.

Dictionnaire initial (suite)

$$
\begin{array}{rrrrr}
e_1 = & 5 & -2x_1 & -3x_2 & -x_3 \\
e_2 = & 11 & -4x_1 & -x_2 & -2x_3 \\
e_3 = & 8 & -3x_1 & -4x_2 & -2x_3 \\
\hline
z = & 0 & +5x_1 & +4x_2 & +3x_3
\end{array}
$$

- z représente la valeur courante de l'objectif. Ses coefficients (5,4, et 3) dans le dictionnaire sont appelés les coûts réduits.
- S'il y a des coûts réduits positifs, on a intérêts à donner une valeur positive aux variables hors-base associées afin d'augmenter la valeur de z.
- Par exemple, ici, si on peut poser $x_1 = 1$, alors z sera augmenté de 5.

Première itération

$$\begin{array}{rrrrr} e_1 = & 5 & -2x_1 & -3x_2 & -x_3 \\ e_2 = & 11 & -4x_1 & -x_2 & -2x_3 \\ e_3 = & 8 & -3x_1 & -4x_2 & -2x_3 \\ \hline z = & 0 & +5x_1 & +4x_2 & +3x_3 \end{array}$$

- On décide d'augmenter la valeur de x_1 et de laisser x_2 et x_3 à zéro. Si on prend x_1 trop grand, les variables en base peuvent devenir négatives. Quelle valeur maximale peut-on choisir ?
- On se sert des contraintes $e_1, e_2, e_3 \geq 0$ où on isole x_1 et on laisse x_2 et x_3 à zéro. Pour e_1, cela donne :

$$5 - 2x_1 \geq 0 \rightarrow 2x_1 \leq 5 \rightarrow x_1 \leq \frac{5}{2} \ .$$

Première itération (suite)

- Pour les trois contraintes, cela donne les inégalités suivantes :

$$x_1 \leq \frac{5}{2} \text{ et } x_1 \leq \frac{11}{4} \text{ et } x_1 \leq \frac{8}{3} \; .$$

- La valeur maximale que peut prendre x_1 est donc

$$x_1 = \min\left\{\frac{5}{2}, \frac{11}{4}, \frac{8}{3}\right\} = \frac{5}{2}$$

  qui correspond à la contrainte $e_1 \geq 0$.

- Donc si on pose $x_1 = \frac{5}{2}$, alors on aura $e_1 = 0$. x_1 va entrer en base et e_1 va sortir de base.

- Cette opération s'appelle un pivot et va mener au second dictionnaire, et à un nouveau et meilleur point extrême.

Première itération : Pivot

- Il faut d'abord effectuer le pivot en exprimer la nouvelle variable de base x_1 en fonction de l'ancienne e_1 :

$$e_1 = 5 - 2x_1 - 3x_2 - x_3 \rightarrow x_1 = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}e_1 \ .$$

- Il faut ensuite écrire les autres lignes du dictionnaires dans lesquelles on remplace x_1 par sa nouvelle expression. Pour e_2, cela donne :
  $e_2 = 11 - 4\left(\frac{5}{2} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}e_1\right) - x_2 - 2x_3 =$
  $1 + 5x_2 + 0x_3 + 2e_1$.

Première itération : Nouveau dictionnaire

Après avoir fait la même opération pour e_3 et z, le pivot est complété et on obtient le second dictionnaire (première itération) :

$$
\begin{array}{lcccc}
x_1 = & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & -\frac{1}{2}e_1 \\
e_2 = & 1 & +5x_2 & +0x_3 & +2e_1 \\
e_3 = & \frac{1}{2} & +\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & +\frac{3}{2}e_1 \\
\hline
z = & \frac{25}{2} & -\frac{7}{2}x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & -\frac{5}{2}e_1
\end{array}
$$

qui correspond au point extrême $x = (5/2, 0, 0)$ pour la valeur courante de $f(x) = 25/2$, avec les écarts $e = (0, 1, 1/2)$ (on a bien un point réalisable).

Première itération : Fin

- Le coût réduit associé à la nouvelle variable hors-base (e_1) est forcément négatif ou nul. Si on refaisait entrer cette variable en base, on obtiendrait le point extrême précédent.
- **Critère d'arrêt :** Comme il reste des coûts réduits positifs, cela signifie que l'on peut améliorer la valeur de f.

Deuxième itération

$$
\begin{array}{rrrrr}
x_1 = & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & -\frac{1}{2}e_1 \\
e_2 = & 1 & +5x_2 & +0x_3 & +2e_1 \\
e_3 = & \frac{1}{2} & +\frac{1}{2}x_2 & -\frac{1}{2}x_3 & +\frac{3}{2}e_1 \\
\hline
z = & \frac{25}{2} & -\frac{7}{2}x_2 & +\frac{1}{2}x_3 & -\frac{5}{2}e_1
\end{array}
$$

- On fait entrer x_3 en base. On a $x_3 = \min\{1, 5\} = 1$. C'est e_3 qui sort de base.
- Le pivot donne $x_3 = 1 + x_2 + 3e_1 - 2e_3$.
- Ce qui permet d'obtenir le nouveau dictionnaire.

Deuxième itération : Nouveau dictionnaire et fin

$$
\begin{array}{rrrrr}
x_1 = & 2 & -2x_2 & -2e_1 & +e_3 \\
e_2 = & 1 & +5x_2 & +2e_1 & +0e_3 \\
x_3 = & 1 & +x_2 & +3e_1 & -2e_3 \\
\hline
z = & 13 & -3x_2 & -e_1 & -e_3
\end{array}
$$

- Ce dictionnaire correspond au point extrême $x = (2, 0, 1)$ avec les écarts $e = (0, 1, 0)$ et $f(x) = 13$.
- **Tous les coûts réduits sont négatifs**, donc on ne peut plus augmenter la valeur de z. **L'algorithme s'arête** et on a la garantie que $x^* = (2, 0, 1)$ est la solution optimale, pour une valeur optimale de $f(x^*) = 13$.

Forme tableau

- Dictionnaire :

$$
\begin{array}{rrrrr}
x_1 = & 2 & -2x_2 & -2e_1 & +e_3 \\
e_2 = & 1 & +5x_2 & +2e_1 & +0e_3 \\
x_3 = & 1 & +x_2 & +3e_1 & -2e_3 \\
\hline
z = & 13 & -3x_2 & -e_1 & -e_3
\end{array}
$$

- Tableau :

c_j	Base variable	5 x_1	4 x_2	3 x_3	0 e_1	0 e_2	0 e_3	Valeur
5	x_1	1	2	0	2	0	-1	2
0	e_2	0	-5	0	-2	1	0	1
3	x_3	0	-1	1	-3	0	2	1
	z_j	5	7	3	1	0	1	
	$c_j - z_j$	0	-3	0	-1	0	-1	13

Algorithme du simplexe

[0] Initialisation

Trouver un point extrême réalisable (phase 1)
Si (échec de la phase 1) : Stop (pas de solution)
Former le dictionnaire initial
$k \leftarrow 1$

[1] Itération k

Choix de la variable entrante
Choix de la variable sortante
Pivot $\rightarrow$ nouveau dictionnaire
Si (tous les coûts réduits ≤ 0) : Stop (sol. optimale)
$k \leftarrow k + 1$
Aller en [1]

Il convient aussi de définir des règles pour les choix des variables entrantes et sortantes.

Phase 1

- Dans l'exemple précédent, on a simplement commencé en fixant les variables d'écart à zéro. Ceci correspondait au point extrême $x = (0, 0, 0)$ (réalisable).
- Que faire si $x = 0$ n'est pas réalisable, afin de trouver le premier dictionnaire ? C'est le but de la phase 1 de l'algorithme du simplexe.

Phase 1 : Exemple

$$\max_{x_1,x_2} x_1 + x_2$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} x_1 - x_2 & \leq -3 \\ 2x_1 + x_2 & \leq 4 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Le point $x = (0,0)$ n'est pas réalisable. On considère le problème auxiliaire suivant :

$$\max_{x_0,x_1,x_2} -x_0 = \min_{x_0,x_1,x_2} x_0$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} x_1 - x_2 & -x_0 \leq & -3 \\ 2x_1 + x_2 & -x_0 \leq & 4 \\ x_0, x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Phase 1 : Exemple (suite)

$$\max_{x_0,x_1,x_2} -x_0$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} x_1 - x_2 & -x_0 \leq & -3 \\ 2x_1 + x_2 & -x_0 \leq & 4 \\ x_0, x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

- Le problème initial admet un point réalisable si et seulement si le problème auxiliaire a comme valeur optimale 0.
- Le problème auxiliaire a la propriété qu'il est facile d'y trouver un point réalisable (il suffit d'augmenter x_0).
- On applique donc le simplexe au problème auxiliaire.

Phase 1 : Exemple (suite)

- Avec les variables d'écart :

$$\max_{x_0,x_1,x_2,e_1,e_2} \; -x_0$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} x_1 - x_2 & -x_0 & +e_1 = & -3 \\ 2x_1 + x_2 & -x_0 & +e_2 = & 4 \\ x_0, x_1, x_2, e_1, e_2 \geq 0 \end{cases}$$

- Premier dictionnaire :

$$\begin{array}{rrrrr} e_1 = & -3 & +x_0 & -x_1 & +x_2 \\ e_2 = & 4 & +x_0 & -2x_1 & -x_2 \\ \hline z = & 0 & -x_0 & & \end{array}$$

- Ça ne correspond pas à un point réalisable, mais un pivot suffira à en obtenir un.

Phase 1 : Exemple (suite)

- Pivot : x_0 entre, e_1 sort.

  Dictionnaire : $$\begin{array}{rrrrr} x_0 = & 3 & +e_1 & +x_1 & -x_2 \\ e_2 = & 7 & +e_1 & -x_1 & -2x_2 \\ \hline z = & -3 & -e_1 & -x_1 & +x_2 \end{array}$$

- Pivot : x_2 entre, x_0 sort.

  Dictionnaire : $$\begin{array}{rrrrr} x_2 = & 3 & +e_1 & +x_1 & -x_0 \\ e_2 = & 1 & -e_1 & -3x_1 & +2x_0 \\ \hline z = & 0 & & & -x_0 \end{array}$$

- Comme la valeur de la solution optimale du problème auxiliaire vaut 0, $x = (0, 3)$ est un point réalisable du problème initial.
- On continue sur le problème original avec le premier

  dictionnaire suivant : $$\begin{array}{rrrr} x_2 = & 3 & +e_1 & +x_1 \\ e_2 = & 1 & -e_1 & -3x_1 \\ \hline z = & 3 & +e_1 & +2x_1 \end{array}$$

Dégénérescence

- Soit le dictionnaire :

$$\begin{array}{rcrrr} x_4 = & 1 & & & -2x_3 \\ x_5 = & 3 & -2x_1 & +4x_2 & -6x_3 \\ x_6 = & 2 & +x_1 & -3x_2 & -4x_3 \\ \hline z = & 0 & +2x_1 & -x_2 & +8x_3 \end{array}$$

- Si on choisit x_3 comme variable entrante, alors on aura $x_3 = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$. Les trois variables de base sont candidates à sortir.
- Si on sort x_4, on obtient :

$$\begin{array}{rcrrr} x_3 = & \frac{1}{2} & & & -\frac{1}{2}x_4 \\ x_5 = & 0 & -2x_1 & +4x_2 & +3x_4 \\ x_6 = & 0 & +x_1 & -3x_2 & +2x_4 \\ \hline z = & 4 & +2x_1 & -x_2 & -4x_4 \end{array}$$

- Un point de base avec des variables de base à 0 est dit dégénéré.

Dégénérescence (suite)

- Si on fait entrer x_1 en base, on obtient :

$$
\begin{array}{rrrrr}
x_3 = & \frac{1}{2} & & & -\frac{1}{2}x_4 \\
x_1 = & 0 & +2x_2 & +\frac{3}{2}x_4 & -\frac{1}{2}x_5 \\
x_6 = & 0 & -x_2 & +\frac{7}{2}x_4 & -\frac{1}{2}x_5 \\
\hline
z = & 4 & +3x_2 & -x_4 & -x_5
\end{array}
$$

- Le point est resté le même : $x = \left(0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$ pour $f(x) = 4$. On a eu une itération dégénérée.
- D'autres pivots mèneront éventuellement à des points non dégénérés.

Cyclage

- Il est possible que l'algorithme du simplexe cycle, c'est-à-dire qu'après un certain nombre d'itérations, on retombe sur le dictionnaire d'une itération précédente. Ceci n'est possible qu'avec des points dégénérés.
- Dans ce cas, si les règles pour les choix des variables entrantes et sortantes ne changent pas, l'algorithme répètera les mêmes itérations à l'infini.
- Des règles existent pour éviter ceci. Par exemple la règle lexicographique de [Bland, 1977] qui consiste à toujours considérer les plus petits indices pour l'entrée et la sortie.

Complexité algorithmique du simplexe

- En théorie, le nombre d'itérations n'est pas polynomial. On peut construire des exemples pathologiques qui vont requérir un nombre exponentiel d'itérations.
- Cependant, en pratique, on observe que le nombre d'itérations requis est entre $2m$ et $3m$ (selon Wolfram MatWorld) où m est le nombre de contraintes.
- La taille des problèmes que les implémentations modernes peuvent résoudre dans des temps raisonnables est de l'ordre de plusieurs milliers de variables et de contraintes.

Analyse de sensibilité

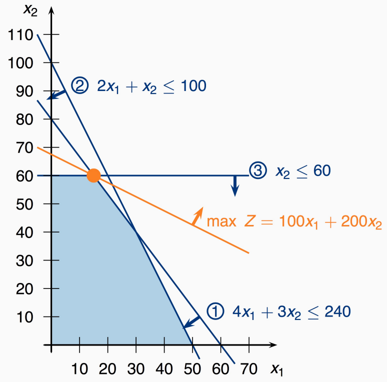
- But : Étudier l'effet des changements de la valeur de certains paramètres sur la solution optimale.
- Pourquoi :
  - Imprécision des données initiales du problème.
  - Incertitude sur la valeur de certains paramètres utilisés.
  - Détecter les paramètres les plus sensibles dans le modèle.

Analyse de sensibilité : Exemple

Pour les analyses de sensibilité, nous étudierons le problème d'optimisation linéaire suivant dont la solution est donnée géométriquement par la figure de droite.

$$\max_{x_1,x_2} 100x_1 + 200x_2$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 & \leq 240 & (1) \\ 2x_1 + x_2 & \leq 100 & (2) \\ x_2 & \leq 60 & (3) \\ x_1, x_2 \geq 0 & & \end{cases}$$

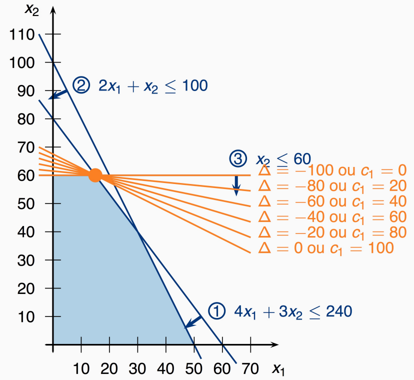


Variation d'un coefficient de la fonction-objectif (1)

Variation de c_1, le coefficient de x_1 dans la fonction-objectif.

$$\begin{aligned} z &= (100+\Delta)x_1 + 200x_2 \\ x_2 &= \frac{-(100+\Delta)}{200}x_1 + \frac{z}{200} \end{aligned}$$

Lorsqu'on diminue de 100 (i.e. $\Delta = -100$) le coefficient de x_1 dans la fonction objectif (i.e $c_1 = 0$), alors la pente de la fonction-objectif devient nulle : $\frac{-(100+\Delta)}{200} = 0$. Cette pente est également celle de la contrainte (3).

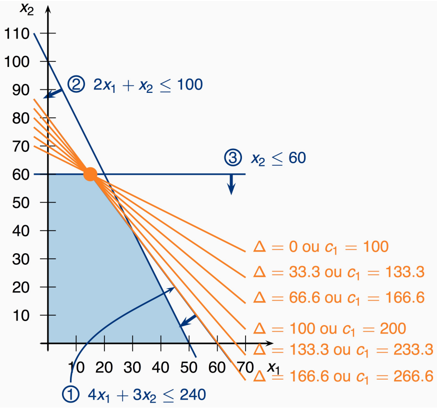


Variation d'un coefficient de la fonction-objectif (2)

Variation de c_1, le coefficient de x_1 dans la fonction-objectif.

$$\begin{aligned} z &= (100+\Delta)x_1 + 200x_2 \\ x_2 &= \frac{-(100+\Delta)}{200}x_1 + \frac{z}{200} \end{aligned}$$

Lorsqu'on augmente de 500/3 (i.e. $\Delta = 500/3 = 166.6$) le coefficient de x_1 dans la fonction objectif (i.e $c_1 = 800/3$), alors la pente de la fonction-objectif devient -4/3 : $\dfrac{-(100+\Delta)}{200} = -\dfrac{4}{3}$. Cette pente est également celle de la contrainte (1).

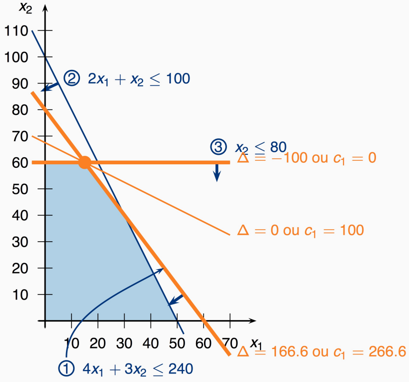


Variation d'un coefficient de la fonction-objectif (3)

Variation de c_1, le coefficient de x_1 dans la fonction-objectif.

$$\begin{aligned} z &= (100+\Delta)x_1 + 200x_2 \\ x_2 &= \frac{-(100+\Delta)}{200}x_1 + \frac{z}{200} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcccl} -4/3 & \leq & \dfrac{-(100+\Delta)}{200} & \leq & 0 \\ -800/3 & \leq & -(100+\Delta) & \leq & 0 \\ -500/3 & \leq & -\Delta & \leq & 100 \\ 500/3 & \geq & \Delta & \geq & -100 \\ -100 & \leq & \Delta & \leq & 500/3 \end{array}$$



Variation d'un coefficient de la fonction-objectif (4)

Solution optimale

Base		100+Δ	200	0	0	0	
c_j	variable	x_1	x_2	e_1	e_2	e_3	Valeur
100+Δ	x_1	1	0	1/4	0	-3/4	15
0	e_2	0	0	1/2	1	1/2	10
200	x_2	0	1	0	0	1	60
z_j		100+Δ	200	25+1/4Δ	0	125-3/4Δ	
$c_j - z_j$		0	0	-25-1/4Δ	0	-125+3/4Δ	13500 + 15Δ

Pour que cette solution demeure optimale, il faut que les $c_j - z_j$ demeurent ≤ 0, donc on doit poser :

$$\begin{aligned} -25 - 1/4\Delta &\leq 0 \\ \Delta &\geq -100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -125 + 3/4\Delta &\leq 0 \\ \Delta &\leq 500/3 \end{aligned}$$

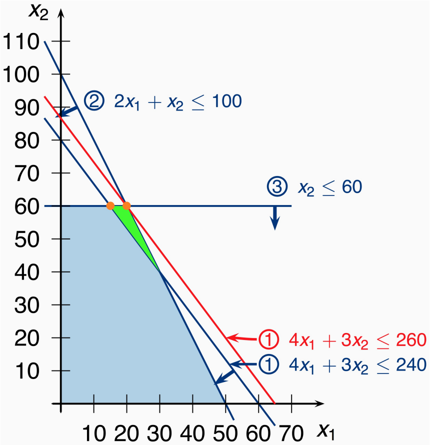
$$-100 \leq \Delta \leq 500/3$$

Variation du membre de droite d'une contrainte (1)

Variation de $b_1 = 240$, le membre de droite de la contrainte (1).

Par exemple, si on augmente de 20 unités (i.e. $\Delta = 20$) le membre de droite de la contrainte (1) ($b_1 = 260$), alors le domaine réalisable augmente (i.e. le triangle vert) et la solution optimale se déplace du point $(15, 60)$ au point $(20, 60)$. La solution est constituée des mêmes variables de base.

Si on va au-delà de 20 unités, la contrainte (1) devient inactive (changement de base) et la solution optimale demeure au même point extrême du polyèdre. Donc l'augmentation maximale sans changer de base est de 20 unités.

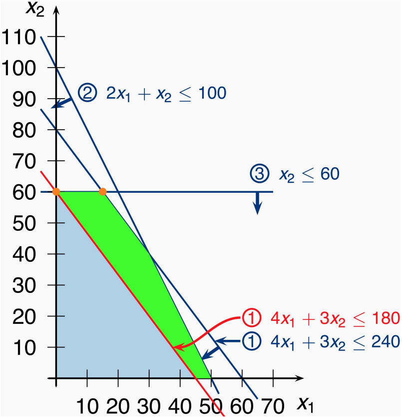


Variation du membre de droite d'une contrainte (2)

Variation de $b_1 = 240$, le membre de droite de la contrainte (1).

Similairement, si on diminue le membre de droite de 60 unités (i.e. $\Delta = -60$) le membre de droite de la contrainte (1)($b_1 = 180$), alors le domaine réalisable diminue (i.e. la partie en vert) et la solution optimale se déplace du point $(15, 60)$ au point $(0, 60)$. La solution optimale est constituée des mêmes variables en base.

Si on va au-delà de 60 unités, la contrainte (3) devient inactive (changement de base) et la solution optimale se déplace alors vers le bas. Donc la diminution maximale sans changer de base est de 60 unités.



Variation du membre de droite d'une contrainte (3)

Tableau initial

c_j	Base variable	100 x_1	200 x_2	0 e_1	0 e_2	0 e_3	Valeur	Δ
0	e_1	4	3	1	0	0	240	1
0	e_2	2	1	0	1	0	100	0
0	e_3	0	1	0	0	1	60	0
	z_j	0	0	0	0	0		
	$c_j - z_j$	100	200	0	0	0	0	

Variation du membre de droite d'une contrainte (3)

Tableau initial

c_j	Base variable	100 x_1	200 x_2	0 e_1	0 e_2	0 e_3	Valeur	Δ
0	e_1	4	3	1	0	0	240	1
0	e_2	2	1	0	1	0	100	0
0	e_3	0	1	0	0	1	60	0
	z_j	0	0	0	0	0		
	$c_j - z_j$	100	200	0	0	0	0	

Solution optimale

c_j	Base variable	100 x_1	200 x_2	0 e_1	0 e_2	0 e_3	Valeur	Δ
100	x_1	1	0	1/4	0	-3/4	15	1/4
0	e_2	0	0	-1/2	1	1/2	10	-1/2
200	x_2	0	1	0	0	1	60	0
	z_j	100	200	25	0	125		
	$c_j - z_j$	0	0	-25	0	-125	13500	25

Variation du membre de droite d'une contrainte (3)

Tableau initial

c_j	Base variable	100 x_1	200 x_2	0 e_1	0 e_2	0 e_3	Valeur	Δ
0	e_1	4	3	1	0	0	240	1
0	e_2	2	1	0	1	0	100	0
0	e_3	0	1	0	0	1	60	0
	z_j	0	0	0	0	0		
	$c_j - z_j$	100	200	0	0	0	0	

Solution optimale

c_j	Base variable	100 x_1	200 x_2	0 e_1	0 e_2	0 e_3	Valeur	Δ
100	x_1	1	0	1/4	0	-3/4	15	1/4
0	e_2	0	0	-1/2	1	1/2	10	-1/2
200	x_2	0	1	0	0	1	60	0
	z_j	100	200	25	0	125		
	$c_j - z_j$	0	0	-25	0	-125	13500	25

Pour que cette solution demeure optimale, il faut que les membres de droite de toutes les contraintes demeurent non négatifs, donc on doit poser :

$$15 + 1/4\Delta \geq 0 \rightarrow \Delta \geq -60$$
$$10 - 1/2\Delta \geq 0 \rightarrow \Delta \leq 20 \qquad -60 \leq \Delta \leq 20$$
$$60 + 0\Delta \geq 0 \rightarrow \text{aucune restriction}$$

Approche intuitive (1)

- Soit le problème d'optimisation linéaire suivant, de valeur optimale $z^* = 13500$:

$$\max_{x_1, x_2} \; z = 100x_1 + 200x_2$$

$$\begin{array}{rcll} 4x_1 + 3x_2 & \leq & 240 & \quad (1) \\ 2x_1 + x_2 & \leq & 100 & \quad (2) \\ x_2 & \leq & 60 & \quad (3) \\ x_1, \; x_2 & \geq & 0 & \end{array}$$

- Plutôt que de résoudre ce problème, essayons d'avoir une estimation rapide de la valeur que peut prendre z.

Approche intuitive (2)

- Imaginons que nous multiplions la première contrainte par 20, la seconde contrainte par 40 et la troisième par 100 et qu'on fasse la somme de ces trois nouvelles contraintes.

$$
\begin{array}{rcrl}
20 \times (4x_1 + 3x_2 & \leq & 240) & (1) \\
40 \times (2x_1 + x_2 & \leq & 100) & (2) \\
100 \times (x_2 & \leq & 60) & (3) \\
\hline
160x_1 + 200x_2 & \leq & 14800 &
\end{array}
$$

- Sachant que la fonction-objectif est $\max\ z = 100x_1 + 200x_2$, on peut alors affirmer à partir de cette combinaison linéaire que

$$
\begin{array}{rcl}
z & = & 100x_1 + 200x_2 \\
 & \leq & 160x_1 + 200x_2 \\
 & \leq & 14800
\end{array}
$$

- Cette nouvelle contrainte fournit une borne supérieure sur la valeur de z.

Approche intuitive (3)

- Pouvons-nous trouver une combinaison linéaire qui offrira une meilleure borne sur la valeur de z ?
- Multiplions la première par 0, la deuxième contrainte par 50 et la troisième par 150, on obtient alors :

$$
\begin{array}{rcrl}
0 \times (4x_1 + 3x_2 & \leq & 240) & (1) \\
50 \times (2x_1 + x_2 & \leq & 100) & (2) \\
150 \times (x_2 & \leq & 60) & (3) \\
\hline
100x_1 + 200x_2 & \leq & 14000 &
\end{array}
$$

- Cette nouvelle combinaison linéaire donne une meilleure borne sur la valeur de z. On sait maintenant que la valeur de z ne peut pas dépasser 14000.
- Est-ce la meilleure borne que l'on puisse trouver ?

Approche intuitive (4)

- Afin d'obtenir la meilleure borne, prenons une combinaison linéaire quelconque avec les constantes π_1 , π_2 et π_3 non négatives :

$$
\begin{array}{rcl}
\pi_1 \times (4x_1 + 3x_2 & \leq & 240) \\
\pi_2 \times (2x_1 + x_2 & \leq & 100) \\
\pi_3 \times (x_2 & \leq & 60) \\
\hline
(4\pi_1 + 2\pi_2 + 0\pi_3)x_1 + (3\pi_1 + 1\pi_2 + 1\pi_3)x_2 & \leq & 240\pi_1 + 100\pi_2 + 60\pi_3
\end{array}
$$

- On peut affirmer que $z \leq 240\pi_1 + 100\pi_2 + 60\pi_3$ si et seulement si :

$$
\begin{array}{c}
4\pi_1 + 2\pi_2 + 0\pi_3 \geq 100 \\
3\pi_1 + 1\pi_2 + 1\pi_3 \geq 200
\end{array}
$$

Approche intuitive (5)

- Donc on cherche à attribuer des valeurs à π_1,π_2 et π_3 qui minimiseront $240\pi_1 + 100\pi_2 + 60\pi_3$. Ceci peut s'effectuer en résolvant le problème d'optimisation linéaire suivant :

$$\min_{\pi_1,\pi_2,\pi_3} \quad w = 240\pi_1 + 100\pi_2 + 60\pi_3$$

$$\begin{array}{rcl} 4\pi_1 + 2\pi_2 + 0\pi_3 & \geq & 100 \\ 3\pi_1 + 1\pi_2 + 1\pi_3 & \geq & 200 \\ \pi_1, \pi_2, \pi_3 & \geq & 0 \end{array}$$

- Ce nouveau problème est appelé le dual du problème linéaire original (qui est appelé le primal).

Primal et dual de l'exemple

Primal

$$\max_{x_1,x_2} \; z = 100x_1 + 200x_2$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 &\leq 240 \\ 2x_1 + 1x_2 &\leq 100 \\ 0x_1 + 1x_2 &\leq 60 \\ x_1,\; x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dual

$$\min_{\pi_1,\pi_2,\pi_3} \; w = 240\pi_1 + 100\pi_2 + 60\pi_3$$

$$\begin{aligned} 4\pi_1 + 2\pi_2 + 0\pi_3 &\geq 100 \\ 3\pi_1 + 1\pi_2 + 1\pi_3 &\geq 200 \\ \pi_1, \pi_2, \pi_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Dual d'un problème linéaire sous forme standard

Primal sous forme standard :

$$\begin{array}{rcrcrcccrcl}
\max\limits_{x \in \mathbb{R}^n} z & = & c_1x_1 & + & c_2x_2 & + & \dots & + & c_nx_n & & \\
\\
& & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
& & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
\\
& & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m \\
& & x_1 & , & x_2 & , & \dots & , & x_n & \geq & 0
\end{array}$$

Dual :

$$\begin{array}{rcrcrcccrcl}
\min\limits_{\pi \in \mathbb{R}^m} w & = & b_1\pi_1 & + & b_2\pi_2 & + & \dots & + & b_m\pi_m & & \\
\\
& & a_{11}\pi_1 & + & a_{21}\pi_2 & + & \dots & + & a_{m1}\pi_m & \geq & c_1 \\
& & a_{12}\pi_1 & + & a_{22}\pi_2 & + & \dots & + & a_{m2}\pi_m & \geq & c_2 \\
\\
& & a_{1n}\pi_1 & + & a_{2n}\pi_2 & + & \dots & + & a_{mn}\pi_m & \geq & c_n \\
& & \pi_1 & , & \pi_2 & , & \dots & , & \pi_m & \geq & 0
\end{array}$$

Exemple 1

Primal :

$$
\begin{array}{lcccccccc}
\max\limits_{x_1,x_2,x_3} z = & 60x_1 & + & 20x_2 & + & 30x_3 & & \\
 & & & & & & & \\
 & 4x_1 & + & 1x_2 & + & 6x_3 & \leq & 48 \\
 & 8x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & \leq & 40 \\
 & 4x_1 & + & 1x_2 & + & 4x_3 & \leq & 16 \\
 & x_1 & , & x_2 & , & x_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Dual :

$$
\begin{array}{lcccccccc}
\min\limits_{\pi_1,\pi_2,\pi_3} w = & 48\pi_1 & + & 40\pi_2 & + & 16\pi_3 & & \\
 & & & & & & & \\
 & 4\pi_1 & + & 8\pi_2 & + & 4\pi_3 & \geq & 60 \\
 & 1\pi_1 & + & 3\pi_2 & + & 1\pi_3 & \geq & 20 \\
 & 6\pi_1 & + & 4\pi_2 & + & 4\pi_3 & \geq & 30 \\
 & \pi_1 & , & \pi_2 & , & \pi_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Exemple 2

Primal :

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr}
\min_{x_1,\ldots,x_4} z = & 5x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 8x_4 & & \\
& & & & & & & & & \\
& 4x_1 & + & 2x_2 & + & 1.5x_3 & + & 5x_4 & \geq & 5 \\
& 3x_1 & + & 2x_2 & & & & & \geq & 6 \\
& 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 4x_4 & \geq & 10 \\
& 2x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & \geq & 8 \\
& x_1 & , & x_2 & , & x_3 & , & x_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Dual :

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrr}
\max_{\pi_1,\ldots,\pi_4} w = & 5\pi_1 & + & 6\pi_2 & + & 10\pi_3 & + & 8\pi_4 & & \\
& & & & & & & & & \\
& 4\pi_1 & + & 3\pi_2 & + & 2\pi_3 & + & 2\pi_4 & \leq & 5 \\
& 2\pi_1 & + & 2\pi_2 & + & 2\pi_3 & + & 4\pi_4 & \leq & 2 \\
& 1.5\pi_1 & & & + & 4\pi_3 & + & 1\pi_4 & \leq & 3 \\
& 5\pi_1 & & & + & 4\pi_3 & + & 5\pi_4 & \leq & 8 \\
& \pi_1 & , & \pi_2 & , & \pi_3 & , & \pi_4 & \geq & 0
\end{array}
$$

Exemple 3

Donner le dual de :

$$\max_{x_1,x_2} 2x_1 + x_2$$

$$\text{s.c.} \begin{cases} x_1 + x_2 & = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 & \geq 3 \\ x_1 - x_2 & \leq 1 \\ x_1 \geq 0 \end{cases}$$

Note : On peut remplacer la variable libre x_2 par $x_2 = x_2' - x_2''$ avec $x_2', x_2'' \geq 0$.

Aide-mémoire pour écrire le dual

Primal	min	max	Dual
Contraintes	$\geq b_i$	≥ 0	Variables
	$\leq b_i$	≤ 0	
	$= b_i$	libre	
Variables	≥ 0	$\leq c_j$	Contraintes
	≤ 0	$\geq c_j$	
	libre	$= c_j$	

Théorème sur la dualité

Soit $x = [x_1 \ x_2 \ \ldots \ x_n]^\top$ un point réalisable pour le primal d'un problème de **maximisation** et soit $\pi = [\pi_1 \ \pi_2 \ \ldots \pi_m]^\top$ un point réalisable pour le dual.

La relation entre la valeur du point du primal $z = c^\top x$ et celle du point du dual $w = \pi^\top b$ est la suivante :

$$z = c^\top x \leq w = \pi^\top b$$

De plus, si $z = w$, alors x est une solution optimale pour le primal et π une solution optimale pour le dual.

Relations entre le primal et le dual

Le tableau qui suit illustre les relations possibles entre le primal et le dual :

		Dual		
		Sol. optimale	Non réalisable	Non borné
Primal	Sol. optimale	Possible	Impossible	Impossible
	Non réalisable	Impossible	Possible	Possible
	Non borné	Impossible	Possible	Impossible

Théorème des écarts complémentaires (V1)

Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ un point réalisable pour un problème de maximisation sous forme standard et soit $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$ un point réalisable pour le dual de ce problème. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que ces deux points soient optimaux sont

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\pi_i = c_j$ ou $x_j = 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$

   et

2. $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ ou $\pi_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$

Autrement dit : écarts $\times$ variables duales $= 0$.

Théorème des écarts complémentaires (V2)

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (réalisable) est une solution optimale si et seulement si il existe des valeurs $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$ telles que

1. $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\pi_i = c_j$ lorsque $x_j > 0 \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$

   et

2. $\pi_i = 0$ lorsque $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b_i \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$

et telles que

1. $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\pi_i \geq c_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$
2. $\pi_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, m$

Relation entre coûts-réduits et variables duales

- Pour un problème de maximisation sous forme standard, les coûts-réduits permettent d'obtenir la solution du dual.
- Sur l'exemple 1, à la solution optimale, les coûts-réduits sont :
  - -5 pour e_2 : donne $\pi_2^* = 5$.
  - -5 pour e_3 : donne $\pi_3^* = 5$.
  - -10 pour x_3 : donne $s_3^* = 10$ (écart pour la 3ème contrainte du dual).
  - $\pi_1^* = 0$ car $e_1 \neq 0$.
  - On a donc la solution du dual $\pi^* = (0, 5, 5)$ et $s^* = (0, 0, 10)$ pour $w^* = z^* = 280$.

Extensions

- Forme matricielle du simplexe.
- Simplexe avec variables bornées, simplexe révisé, simplexe dual.
- Méthodes de points intérieurs.
- Problèmes de grandes tailles. Méthodes de décomposition (génération de colonnes).

Références I

Bland, R. (1977).
New Finite Pivoting Rules for the Simplex Method.
Mathematics of Operations Research, 2(2) :103–107.

Chvátal, V. (1983).
Linear programming.
A Series of books in the mathematical sciences. Freeman, New York.

Gamache, M. (2016).
Notes de cours, MTH2402, Recherche opérationnelle.

Nelder, J. and Mead, R. (1965).
A simplex method for function minimization.
The Computer Journal, 7(4) :308–313.

Savard, G. (1998).
Notes de cours, GCH2530, Programmation numérique en génie chimique.