

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL

APPLICATION DES COPULES À LA FINANCE DE MARCHÉ

THÈSE
PRÉSENTÉE
COMME EXIGENCE PARTIELLE
DU PROGRAMME CONJOINT DE
DOCTORAT EN ADMINISTRATION

PAR
PIERRE BOUVIER

FÉVRIER 2010

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À MONTRÉAL
Service des bibliothèques

Avertissement

La diffusion de cette thèse se fait dans le respect des droits de son auteur, qui a signé le formulaire *Autorisation de reproduire et de diffuser un travail de recherche de cycles supérieurs* (SDU-522 – Rév.01-2006). Cette autorisation stipule que «conformément à l'article 11 du Règlement no 8 des études de cycles supérieurs, [l'auteur] concède à l'Université du Québec à Montréal une licence non exclusive d'utilisation et de publication de la totalité ou d'une partie importante de [son] travail de recherche pour des fins pédagogiques et non commerciales. Plus précisément, [l'auteur] autorise l'Université du Québec à Montréal à reproduire, diffuser, prêter, distribuer ou vendre des copies de [son] travail de recherche à des fins non commerciales sur quelque support que ce soit, y compris l'Internet. Cette licence et cette autorisation n'entraînent pas une renonciation de [la] part [de l'auteur] à [ses] droits moraux ni à [ses] droits de propriété intellectuelle. Sauf entente contraire, [l'auteur] conserve la liberté de diffuser et de commercialiser ou non ce travail dont [il] possède un exemplaire.»

REMERCIEMENTS

Au cours de cette longue démarche qui est la *réalisation* d'un doctorat j'ai une liste importante de remerciements à formuler. Dans un premier temps je souhaite remercier ma conjointe Linda, qui a su m'apporter le support aux moments nécessaires. Durant ce cheminement j'ai eu l'honneur et le plaisir de côtoyer plusieurs professeures et professeurs, j'ai toujours apprécié leur enseignement et leurs bons conseils.

En particulier j'aimerais spécialement remercier mon directeur Professeur Komlan Sedzro, qui m'a guidé vers une théorie dont je soupçonnais à peine l'existence, la théorie des copules. Il m'a confié le défi d'établir les principales applications à la finance de marché.

Je remercie aussi les membres de mon comité, Professeur Bruno Rémillard et Professeur Claude Pichet. Bruno Rémillard, sans doute une sommité internationale en probabilités et un spécialiste reconnu en théorie des copules, a su m'offrir généreusement son aide, ce fut grandement apprécié. Claude Pichet, m'a accompagné et encouragé depuis plus de quinze ans dans mes études en mathématiques, il a été mon directeur de mémoire en mathématiques fondamentales, sans ses judicieux conseils je ne serais jamais rendu à cette étape dans mes études.

Je voudrais aussi remercier la Professeure Lise Préfontaine, directrice du programme du Doctorat en administration à l'UQAM, elle a su me faire confiance. Finalement, je tiens aussi à remercier Madame Marie-Hélène Trépanier pour son support lorsque nécessaire, elle savait toujours nous accueillir avec un sourire radieux.

Table des matières

Table des figures	viii
Liste des tableaux	xii
Résumé	xviii
INTRODUCTION	1
Chapitre I	
INTRODUCTION MATHÉMATIQUE	13
1.1 Définitions mathématiques	13
1.1.1 Définitions et théorèmes	13
1.1.2 Modèles de copules	16
1.2 Calculer le paramètre d'une copule archimédienne	28
1.3 Copules hiérarchiques	31
1.3.1 Copules hiérarchiques imbriquées « <i>fully nested copulas</i> »	32
1.3.2 Copules hiérarchiques partiellement imbriquées	35
1.3.3 Exemple avec une copule archimédienne de Clayton	38
1.4 Générateur hiérarchique	41
1.4.1 Distribution de Kendall	41
1.4.2 Simulations	44
1.4.3 Génération des variables	48
1.4.4 Clayton	49
1.4.5 Structure de copule hiérarchique à partir de six marchés financiers	50
Chapitre II	
DÉPENDANCE	55
2.1 Comportement des marchés financiers	55
2.2 Les mesures de corrélation en finance de marché	57
2.2.1 Traitement des distributions marginales	57
2.2.2 Visualiser la normalité	57

2.2.3	Modèle GARCH	58
2.2.4	Corrélation linéaire	62
2.2.5	Corrélation de rangs	63
2.2.6	Copules comme mesure de dépendance	65
2.2.7	Méthodes pour identifier la dépendance entre les marchés financiers .	67
2.2.8	Les représentations <i>Chi-Plot</i>	68
2.2.9	Détecter la dépendance avec les diagrammes de Kendall	72
2.2.10	Estimation des paramètres méthode de Genest-Rivest 1993, cas bivarié	77
2.2.11	Illustration de la fonction de dépendance entre les marchés canadien et américain	80
2.2.12	Évolution de la dépendance et étude des distributions marginales . .	83
Chapitre III		
	VALORISATION D'UNE OPTION	87
3.1	Introduction	87
3.2	Valorisation d'options avec un modèle GARCH-Copule	89
3.2.1	GARCH(1,1)	90
3.3	Valorisation d'une option sur plus d'un actif sous-jacent	94
3.3.1	Valorisation d'une option sur deux actifs sous-jacents par les copules	94
3.3.2	Valorisation d'une option sur plusieurs sous-jacents	99
3.4	Résultats	101
Chapitre IV		
	LES FONDS DE COUVERTURE	109
4.1	Pourquoi investir dans un fonds de couverture	109
4.2	Caractéristiques des fonds de couverture	110
4.3	Choix d'un fonds de couverture	118
4.4	Mesure de la valeur à risque d'un portefeuille composé de fonds de couverture	118
4.5	Dépendance d'un fonds de couverture avec un portefeuille de marché	126
4.5.1	Paramètres GARCH(1,1)	127
4.5.2	Interprétation des résultats	129
Chapitre V		

CONSEILS À UNE CAISSE DE RETRAITE POUR LA GESTION DE SES RISQUES DE MARCHÉ	135
5.1 Les risques d'une caisse de retraite	135
5.2 Diversification dans des classes d'actifs différentes	137
5.3 Mesures de dépendance	137
5.4 Valeur à Risque (VaR) d'un portefeuille	138
5.5 Utilisation de fonds de couverture	139
5.6 Utilisation des copules	140
5.7 Modélisation d'un portefeuille de marché	141
5.7.1 Choix des actifs	143
5.7.2 Méthode des covariances	145
5.7.3 Méthode du calcul de la VaR historique	147
5.7.4 Méthode de simulations Monte Carlo	147
5.7.5 Méthode de la valeur à risque avec les copules	149
5.7.6 Analyse de sensibilité (copules)	152
CONCLUSION	157
Annexe A	
COPULES ARCHIMÉDIENNES	167
Annexe B	
MÉTHODOLOGIE DE STULZ POUR L'ÉVALUATION D'UNE OPTION SUR DEUX ACTIFS FINANCIERS	169
B.1 Call on min	170
B.2 Call on max	172
B.3 Put on min	172
B.4 Put on max	173
Annexe C	
VALORISATION D'OPTIONS À PARTIR DES FONCTIONS COPULES	175
C.1 Comparaison avec la méthode de Stulz	175
C.2 Options sur six actifs sous-jacents	180
Annexe D	
VALORISATION D'OPTIONS SUR PLUS D'UN ACTIF SOUS-JACENTS PAR SIMULATIONS DE MONTE CARLO	193

Annexe E	
COMBINAISONS DE FONDS DE COUVERTURE	195
Annexe F	
SIMULATIONS ET CONSTRUCTION DE FONDS DE COUVERTURE À PARTIR DES FONCTIONS COPULES ET D'UN MODÈLE GARCH(1,1)	227
F.1 Tableaux sur l'effet de la diversification apportée par les fonds de couverture	227
Annexe G	
CODE C	278
G.1 Simulation et mesure de la dépendance	278
G.2 Valorisation des options	291
G.3 Options Monte Carlo	303
G.4 Simulation Fonds de Couverture	310
G.5 Calcul des Rangs et Construction de Copules	331
G.6 Programmes utilitaires	336
G.6.1 Calcul matriciel	336
G.6.2 Programme de trie	356
Bibliographie	358

Table des figures

1.1 Paires de la copule normale et Student-t ($\nu = 3$) bivariées avec un tau de Kendall 0.49.	20
1.2 Copule hiérarchique imbriquée, (<i>fully nested copula</i>).	33
1.3 Construction d'une copule hiérarchique paire par paire.	34
1.4 Structure d'une copule hiérarchique archimédienne de dimension quatre.	35
2.1 Q-Q-plot des marchés canadien et américain, on y observe l'éloignement de la loi normale, surtout dans les queues des distributions.	58
2.2 Le graphe du haut représente les rendements mensuels du marché canadien, alors que celui du bas, ceux du marché américain.	59
2.3 Le graphe du haut représente les rendements quotidiens du marché canadien, celui du bas ceux du marché américain.	60
2.4 Le graphe de gauche représente des couples concordants, le graphe de droite des couples discordants.	65
2.5 Rendements mensuels des marchés américain et canadien et leurs rangs normalisés.	67
2.6 Diagramme Chi-Plot pour des données indépendantes et pour les rendements entre les marchés américain et canadien.	70
2.7 Chi-Plot pour des données gaussiennes avec $\rho = 0.5$ et avec $\rho = 0.95$	72

2.8	Chi-Plot pour des variables aléatoires selon une distribution de Student avec trois degrés de liberté pour $\rho = 0.5$ et $\rho = 0.95$	72
2.9	Chi-plot pour des variables aléatoires indépendantes une distribution bivariée gaussienne et une distribution bivariée de Student.	73
2.10	Le graphe représente le vecteur bivarié des rendements des marchés canadien et américain pour la copule de Clayton avec un τ de Kendall de 0.51	77
2.11	Représentation de la fonction λ_n : marchés canadien et américain.	79
2.12	Rendements conjoints de l'indice TSX et S&P 500.	80
2.13	Volatilité implicite du S&P500, indice VIX.	83
2.14	Indice VIX et l'évolution des rendements du S&P 500 (depuis 1990).	84
2.15	Représentation de la structure de dépendance entre les marchés TSX et S&P500 pour la période 1992 à 1996.	85
2.16	Représentation de la structure de dépendance entre les marchés TSX et S&P500 pour la période 1997 à 2003.	86
2.17	<i>Chi-Plot</i> pour le TSX et le S&P500 (1992-1996 τ Kendall = 0.258) et (1997-2003 τ de Kendall = 0.504).	86
3.1	Valeurs des options selon leurs <i>moneyness</i> , options d'échéance 1 an avec 10 000 simulations.	107
4.1	Représentation graphique de l'éloignement de la normalité pour les fonds de couverture.	112

4.2	Effet de diversification pour 1 à 20 fonds (axe horizontal) : graphique de gauche le nombre de fois sur 100 que la VaR à 5% est plus grande pour une sélection de fonds de couverture par rapport à un portefeuille indiciel, le graphique de droite est pour le 5e pire cas.	120
4.3	Effet de diversification pour 1 à 6 fonds, comparaison entre les fonds choisis au hasard et les fonds avec des fonctions distinctes, la ligne pointillée représente le choix des fonds de couverture de nature différente.	121
4.4	Représentation de la structure de dépendance entre un portefeuille diversifié avec 1 fonds de couverture.	122
4.5	Représentation de la fonction de densité conjointe avec un fonds de couverture et un portefeuille diversifié.	123
4.6	Représentation de la structure de dépendance entre un portefeuille diversifié avec 10 fonds de couverture.	124
4.7	Fonction d'autocorrélation dans une série chronologique d'un portefeuille composé de fonds de couverture.	128
4.8	Fonction d'autocorrélation partielle dans une série chronologique d'un portefeuille composé de fonds de couverture.	129
4.9	Relation entre les résidus dérivés du modèle, le sigma et les rendements observés pour une simulation comprenant un fonds.	130
4.10	Relation entre les résidus dérivés du modèle, le sigma et les rendements observés pour une simulation comprenant cinq fonds.	130
4.11	Relation entre les résidus dérivés du modèle, le sigma et les rendements observés pour une simulation comprenant le portefeuille diversifié de six indices boursiers.	131

4.12 Impact sur le rendement mensuel de l'ajout de fonds de couverture à un portefeuille diversifié.	132
5.1 Quatre indices de marché choisis liés à une politique de placement d'une caisse de retraite canadienne typique. Pour fin de comparaison, chacun des histogrammes est construit à la même échelle.	142
5.2 Frontière efficiente à partir de quatre indices de marché.	143
5.3 La dispersion des rendements de la politique de référence construite à partir de quatre indices de marché.	146
5.4 La représentation copule des quatre indices de marché.	151

Liste des tableaux

1.1	<i>Copules de la famille archimédienne</i>	23
1.2	<i>Générateur de copules archimédiennes ainsi que leurs transformées de Laplace</i>	25
2.1	<i>Estimateur Vraisemblance (MLE) des paramètres GARCH pour les distributions marginales.</i>	61
2.2	Copule empirique générée à partir des rendements conjoints quotidiens entre les marchés canadien et américain pour la période de 1992 à 2006.	82
2.3	TSX et S&P500 pour des périodes de volatilité différentes.	84
3.1	La valeur d'une option sur deux sous-jacents Canada et France.	97
3.2	La valeur d'une option sur deux sous-jacents Canada et France.	98
3.3	Matrice de corrélation entre les six marchés choisis.	101
3.4	Matrice des Tau de Kendall entre les six marchés choisis.	102
3.5	Transformée de Cholesky pour la matrice des corrélations.	102
3.6	Les paramètres GARCH pour les six marchés choisis.	102
3.7	La valeur d'une option sur six actifs sous-jacents Canada, France, Allemagne, Angleterre, Japon et États-Unis échéance un mois.	103
3.8	La valeur d'une option sur six actifs sous-jacents Canada, France, Allemagne, Angleterre, Japon et États-Unis échéance un an.	104

3.9	La valeur d'une option sur six actifs sous-jacents Canada, France, Allemagne, Angleterre, Japon et États-Unis échéance un mois.	105
3.10	La valeur d'une option sur six actifs sous-jacents Canada, France, Allemagne, Angleterre, Japon et États-Unis échéance un an.	106
4.1	<i>Types de fonds – Abréviations</i>	111
4.2	<i>Quatre premiers moments des distributions des rendements</i>	112
4.3	<i>Tau de Kendall</i>	115
4.4	<i>Coefficient de corrélation linéaire</i>	116
4.5	<i>Probabilités de trouver 20% des observations communes dans la queue inférieure d'une combinaison de fonds.</i>	117
4.6	<i>Combinaison d'un fonds choisi au hasard avec un portefeuille diversifié</i> .	124
4.7	<i>Combinaison de 10 fonds choisi au hasard avec un portefeuille diversifié</i>	125
4.8	Test Q	128
4.9	Valeurs à risque simulées d'un portefeuille composé de 10% de fonds de couverture et 90% d'un portefeuille diversifié.	133
5.1	<i>Rendements historiques du marché américain, données compilées par Jeremy Seigel.</i>	136
5.2	Matrice des corrélations pour les quatre indices de marchés	143
5.3	Portefeuille de référence	144
5.4	Construction de la frontière efficiente.	144
5.5	<i>Matrice des covariances quotidiennes entre les quatre classes d'actif</i> . .	146

5.6	Matrices de corrélations des rangs (τ de Kendall).	153
5.7	Copule empirique et théorique pour la période de 1992 à 2006	154
5.8	Copule empirique et théorique comparaison de la période de haute volatilité avec la période de volatilité normale.	155
C.1	Valeur d'une option sur deux sous-jacents Canada et France échéance un mois.	176
C.2	Valeur d'une option sur deux sous-jacents Canada et France échéance trois mois.	177
C.3	Valeur d'une option sur deux sous-jacents Canada et France échéance six mois.	178
C.4	Valeur d'une option sur deux sous-jacents Canada et France échéance un an.	179
C.5	Valeur d'une option sur six actifs sous-jacents Canada, France, Allemagne, Angleterre, Japon et États-Unis échéance un mois.	181
C.6	Valeur d'une option sur six actifs sous-jacents Canada, France, Allemagne, Angleterre, Japon et États-Unis échéance trois mois.	182
C.7	Valeur d'une option sur six actifs sous-jacents Canada, France, Allemagne, Angleterre, Japon et États-Unis échéance six mois.	183
C.8	Valeur d'une option sur six actifs sous-jacents Canada, France, Allemagne, Angleterre, Japon et États-Unis échéance un an.	184
C.9	Valeur d'une option sur six actifs sous-jacents Canada, France, Allemagne, Angleterre, Japon et États-Unis échéance un mois.	185

C.10	Valeur d'une option sur six actifs sous-jacents Canada, France, Allemagne, Angleterre, Japon et États-Unis échéance trois mois.	186
C.11	Valeur d'une option sur six actifs sous-jacents Canada, France, Allemagne, Angleterre, Japon et États-Unis échéance six mois.	187
C.12	Valeur d'une option sur six actifs sous-jacents Canada, France, Allemagne, Angleterre, Japon et États-Unis échéance un an.	188
C.13	Valeur d'une option sur six actifs sous-jacents Canada, France, Allemagne, Angleterre, Japon et États-Unis échéance un mois.	189
C.14	Valeur d'une option sur six actifs sous-jacents Canada, France, Allemagne, Angleterre, Japon et États-Unis échéance trois mois.	190
C.15	Valeur d'une option sur six actifs sous-jacents Canada, France, Allemagne, Angleterre, Japon et États-Unis échéance six mois.	191
C.16	Valeur d'une option sur six actifs sous-jacents Canada, France, Allemagne, Angleterre, Japon et États-Unis échéance un an.	192
E.1	<i>Portefeuille et Fonds de Fonds</i>	196
E.2	<i>Portefeuille et Global Macro</i>	197
E.3	<i>Portefeuille et Distress</i>	198
E.4	<i>Portefeuille et Equity Hedge</i>	199
E.5	<i>Portefeuille et Equity Market Neutral</i>	200
E.6	<i>Portefeuille et Event Driven</i>	201
E.7	<i>Portefeuille et Convertible Arbitrage</i>	202
E.8	<i>Global Macro et Distress</i>	203

E.9	Global Macro <i>et</i> Equity Hedge	204
E.10	Global Macro <i>et</i> Equity Market Neutral	205
E.11	Global Macro <i>et</i> Event Driven	206
E.12	Global Macro <i>et</i> Convertible Arbitrage	207
E.13	Global Macro <i>et</i> Funds of Funds	208
E.14	Equity Hedge <i>et</i> Funds of Funds	209
E.15	Equity Hedge <i>et</i> Event Driven	210
E.16	Equity Hedge <i>et</i> Convertible Arbitrage	211
E.17	Equity Hedge <i>et</i> Funds of Funds	212
E.18	Equity Market Neutral <i>et</i> Event Driven	213
E.19	Equity Market Neutral <i>et</i> Convertible Arbitrage	214
E.20	Equity Market Neutral <i>et</i> Funds of Funds	215
E.21	Event Driven <i>et</i> Convertible Arbitrage	216
E.22	Event Driven <i>et</i> Fund of Funds	217
E.23	Convertible Arbitrage <i>et</i> Fund of Funds	218
E.24	<i>Obligations et Global-Macro</i>	219
E.25	<i>Obligations et Distress</i>	220
E.26	<i>Obligations et Equity Hedge</i>	221
E.27	<i>Obligations et Equity Market Neutral</i>	222
E.28	<i>Obligations et Event Driven</i>	223

E.29	<i>Obligations et Convertible Arbitrage</i>	224
E.30	<i>Obligations et Fonds de Fonds</i>	225

Résumé

L'OBJECTIF DE LA THÈSE est de montrer l'importance et l'utilité de la théorie mathématique que les copules apportent à la finance de marché. La motivation première de ces applications réside dans le fait que les comportements des rendements conjoints des marchés financiers s'éloignent de la normalité. Ainsi, les méthodes statistiques traditionnelles, reposant sur cette hypothèse, ne peuvent pas être appliquées à la finance de marché. Dans ce document, avec l'aide des copules nous apportons un éclairage nouveau sur les comportements conjoints et des mesures de corrélations entre les marchés. Les copules sont des outils mathématiques puissants qui remédient aux lacunes laissées par les mesures traditionnelles de corrélations et de risque. Les copules reposent sur un cadre mathématique formel qui en permet l'application.

Nous montrons aussi que les copules sont utilisées pour explorer la dépendance entre les rendements des actifs d'un portefeuille. Elles trouvent application à la valorisation de titres dont les valeurs marchandes dépendent de plusieurs actifs financiers, par exemple une option de type européen sur plusieurs actifs sous-jacents. Nous montrons aussi leurs utilités comme outils de mesure de diversification d'un portefeuille avec l'ajout de un ou plusieurs fonds de couverture. Finalement, nous exposons comment la théorie des copules vient en aide aux gestionnaires d'actifs d'une caisse de retraite dans le choix des titres et la composition d'un portefeuille.

MOTS CLÉS Copules elliptiques ; Copules archimédiennes ; Copules hiérarchiques ; Distributions marginales ; Fonctions de dépendance ; *Chi-plots* ; Tau de Kendall ; Rho de Pearson ; Corrélations de rangs ; Valorisation d'options -- plusieurs sous-jacents ; Fonds de couverture.

Notation et symboles utilisés

GARCH	:	General Autoregressive Conditional Heteroskedasticity
\mathbb{I}	:	Fonction Indicatrice
iid	:	Indépendant et identiquement distribué
$\overline{\mathbb{R}}$	=	$[-\infty, \infty]$
ssi	:	si et seulement si
$U(0, 1)$:	Loi uniforme sur $[0, 1]$
$[n]$:	Plus petit nombre entier $\geq n$
X^T	:	Transposé de X
$\#$:	Cardinalité d'un ensemble
Sign	:	Signe

INTRODUCTION

Les marchés financiers sont complexes, difficiles à comprendre et impossibles à prévoir. Cette thèse explore le potentiel d'applications de la théorie des copules à la finance de marché. Nous démontrons que la théorie des copules doit être appliquée à la finance de marché, soit pour mesurer la dépendance entre les actifs, soit comme outils de simulations pour évaluer les prix de montages financiers dont les valeurs intrinsèques reposent sur les comportements conjoints de plusieurs actifs. Nous démontrons aussi que les copules doivent remplacer les outils de mesure de risque ou de corrélations utilisées par les banques et les gestionnaires d'actifs. Nous allons aussi montrer que ce sont des outils puissants qui permettent de comprendre les relations entre les distributions conjointes des actifs qui composent un portefeuille ou une politique de placement.

Nous pouvons en toute confiance utiliser cette théorie, elle repose sur un cadre mathématique formel issu de la théorie des probabilités, une introduction à la théorie des copules est présentée au chapitre I de cette thèse. Cette théorie est déjà appliquée à plusieurs champs scientifiques.

Les principales applications que nous explorons dans ce document sont les mesures de dépendance entre les marchés, les méthodes de simulations avec les copules comme base pour la valorisation d'options sur plusieurs sous-jacents, leurs utilités dans les fonds de couverture et finalement leurs importances au sein de l'administration des placements d'une caisse de retraite.

Une copule met en évidence la relation de dépendance entre deux ou plusieurs variables aléatoires par la relation :

$$H(x, y) = C \{F(x), G(y)\}, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

ici F et G sont les marges et C la copule. Une copule est donc une fonction de répartition multivariée à marges uniformes sur $(0, 1)$. Elle est définie par l'équation (1) :

$$C(u, v) = \mathbb{P}(U \leq u, V \leq v), \quad (1)$$

u et v sont des variables aléatoires de lois uniformes sur $(0, 1)$. Nous avons un modèle de copules pour les variables aléatoires X et Y lorsque

$$H(x, y) = C\{F(x), G(y)\}, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

dans cette expression, H est la fonction de répartition conjointe des variables aléatoires X et Y . On peut changer les fonctions de répartition, les marges F et G , à volonté tout en conservant la structure de dépendance (la copule) intacte. F et G pourraient être de lois différentes.

Les copules ont vu le jour grâce à Sklar (1959). C'est en 1998, seulement, que les académiciens se sont penchés sur l'utilisation des copules en gestion des risques. Les copules ont trouvé leurs applications à la finance de marché il y a à peine cinq ans, plusieurs compagnies d'assurance et quelques institutions financières ont déjà commencé à utiliser les copules dans la gestion de leurs risques. Un portefeuille est habituellement composé de plusieurs actifs risqués, souvent diversifiés dans plusieurs industries ou plusieurs pays. Un gestionnaire de portefeuille comprend depuis longtemps l'importance de la diversification. En 2008, nous avons vécu l'une des pires crises financières de l'histoire économique moderne, elle a ébranlé les marchés financiers à travers le monde. Aucun pays, aucun marché, n'a été épargné. De toute évidence la diversification n'était pas au rendez-vous. L'épidémie qui a atteint simultanément tous les marchés financiers a fait en sorte que le principe de diversification a été durement mis à l'épreuve. Ce tsunami financier a fortement ébranlé les croyances des investisseurs dans les mérites de la diversification, au sens traditionnel du terme. La question qui se pose maintenant est comment construire un portefeuille diversifié, ou du moins comprendre les risques qui peuvent l'affecter.

L'idée principale de la théorie des copules est de séparer les distributions conjointes, les marges, de leurs structures de dépendance, la copule. À notre avis les copules sont des

outils mathématiques puissants qui permettent de mieux comprendre les comportements conjoints des marchés dans lesquels nous investissons.

À titre d'exemple, au tableau suivant, sont exposés certains résultats de la débâcle financière de 2008. On remarque une forte corrélation entre les différents marchés au travers le monde, on observe aussi la forte coïncidence dans les rendements pour différents marchés boursiers (mesure de dépendance).

Débâcle financière de 2008		
Marché	Baisse-2008	Pire baisse
Dow Jones	-32.5%	-52.7% (1931)
S&P 500	-38.5%	-38.6% (1937)
S&P TSX	-33.0%	
Islande	-95%	
MSCI Mondial	-42.1%	
MSCI Pays émergents	-54.5%	

Si l'on examine maintenant certaines données financières, on peut observer la forte volatilité qui a affecté plusieurs classes d'actifs ou marchés pris individuellement (les marges) :

- Le le 3 juillet 2008, le prix du pétrole a connu un sommet de 145.29 \$ le baril et il a touché un creux de 33.87 \$ le 19 décembre 2008,
- Les obligations long-terme des États-Unis ont apporté un rendement de 9% en une seule journée,
- Le dollar canadien a chuté de 15 % en trois semaines. Le taux de change de 1.09 \$CAD/\$US au 6 novembre 2007, au 31 décembre 2008, il a clôturé à 0.82 \$CAD/\$US.
- Baisse de 25 % de plusieurs bourses en trois semaines,

- Les rendements des bons du Trésor américains, d'échéance un mois à trois mois, ont été négatifs à l'occasion.

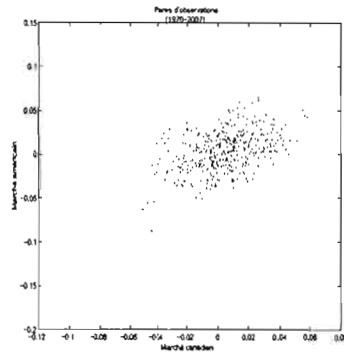
Lorsque la théorie moderne de portefeuille a vu le jour avec le CAPM dans les années 1950 elle mettait en relation les rendements et les risques d'un portefeuille, les risques mesurés par la variance et les corrélations étaient présumées constantes dans le temps. De nos jours, probablement à cause de la globalisation des marchés, on peut observer l'effet dynamique des corrélations entre les marchés. Nous nous rendons compte que les outils de la finance traditionnelle de marché ont besoin d'un complément pour approfondir la compréhension des comportements des marchés financiers. Dans ce contexte la théorie des copules apporte aux gestionnaires d'actifs un outil différent qui les aide à mieux saisir les comportements conjoints des marchés financiers. Une copule traite de la dépendance entre les distributions des rendements. La mesure de dépendance est dissociée de la fonction de répartition de chaque marché pris individuellement. Dans ce document on parle de la mesure de dépendance, la copule, et du comportement individuel de chaque marché ou actif, la marge.

Comme nous l'avons élaboré dans l'introduction mathématique les copules sont des fonctions de distributions multivariées dont leurs distributions marginales, à une dimension, sont uniformes sur l'intervalle $(0, 1)$. On peut trouver l'élaboration de la théorie des copules dans l'ouvrage de Roger Nelsen 1998—"An Introduction to Copulas" (26).

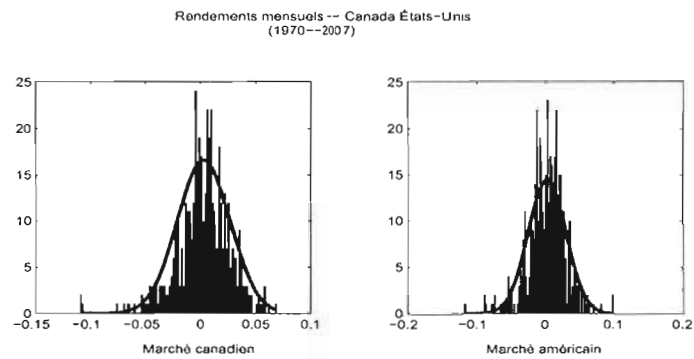
Les copules deviennent de plus en plus présentes dans la littérature financière. Leurs attraits résident dans le fait que ce sont des outils à la fois puissants et flexibles qui permettent de modéliser la dépendance sans prendre en compte le comportement des distributions marginales.

Les graphiques suivants en témoignent :

(A) Les paires d'observations entre les marchés canadien et américain :



(B) Le comportement des marges : les marchés canadien et américain pris individuellement ainsi que la représentation graphique de leurs fonctions de densité :



Il existe une grande variété de copules, elles se divisent en deux principales catégories ; les copules méta-elliptiques et les copules archimédiennes.

Copules elliptiques : Au tableau suivant nous retrouvons la fonction de densité des principales copules dites de type elliptique :

Copules elliptiques	
Copule	$g(t)$
Normale	$(2\pi)^{-\rho^2} \exp(-t^2/2)$
Student	$\frac{(\pi\nu)^{-\rho^2} \Gamma(\frac{\rho+\nu}{2})}{2} (1+t/\nu)^{-(\rho+\nu)/2}$
Cauchy	$\frac{(\pi)^{-\rho^2} \Gamma(\frac{\rho+1}{2})}{2} (1+t)^{-(\rho+1)/2}$
Pearson type II	$\frac{\Gamma(\rho/2+\nu+1)}{\pi^{\rho/2} \Gamma(\nu+1)} (1-t)^\nu$
	$t \in [-1, 1], \nu > -1$

Copules archimédiennes : Les copules archimédiennes sont définies par leurs fonctions génératrices $\varphi_\theta(t)$:

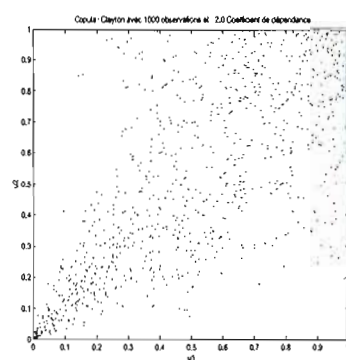
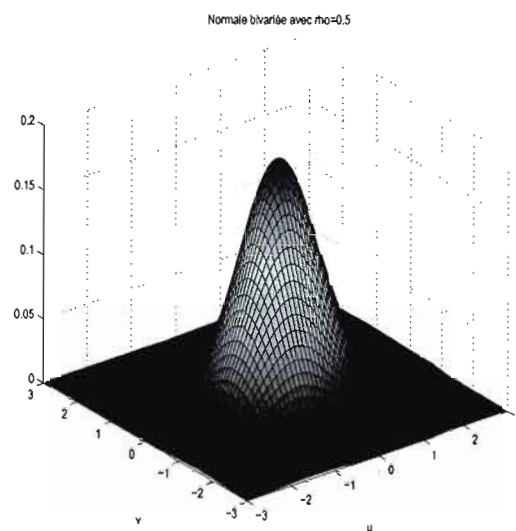
$$\varphi_\theta(C(u, v)) = \overline{\varphi_\theta(u)} + \varphi_\theta(v).$$

On retrouve un grand nombre de copules archimédiennes. Nelsen 1991, (26) a répertorié une vingtaine de copules de type archimédien à un paramètre (22 pour être exact). À l'annexe A nous présentons la définition mathématique de chacune de ces copules ainsi que leurs fonctions génératrices $\varphi_\theta(t)$.

Dans ce document, les simulations sont faites à partir des copules gaussiennes et des copules archimédiennes de Clayton, de Gumbel et de Frank. Ce sont-là les copules le plus fréquemment retrouvées dans la littérature financière. Les copules archimédiennes utilisées correspondent à la copule # 1 pour la copule de Clayton, # 4 pour la copule de Gumbel et la copule # 5 pour la copule de Frank. La copule # 3 porte le nom de Ali-Mikhail-Haq, les autres sont connues selon leurs numéros.

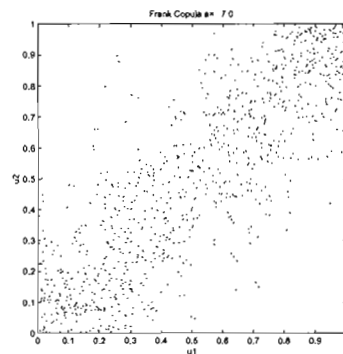
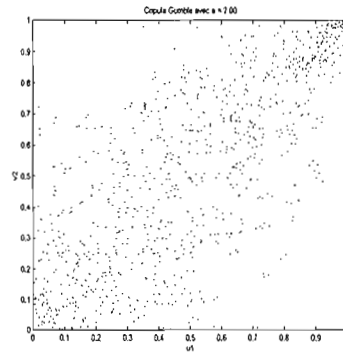
Par exemple la copule de Clayton simule bien la dépendance dans les parties inférieures des queues d'une distribution conjointe, Gumbel permet de bien représenter la dépendance dans les parties supérieures des queues des distributions alors que la copule de Frank simule à la fois les parties inférieures et supérieures des distributions. La copule gaussienne nous donne une distribution symétrique. Comme on peut le voir illustré à la figure suivante :

Pour la copule de Clayton on observe une plus forte dépendance dans la queue inférieure qu'ailleurs dans la distribution conjointe.



Alors que pour la copule de Gumbel les regroupements de points s'observent principalement dans la queue superieure de la distribution conjointe.

La copule de Frank, pour sa part, les regroupements des paires de points simulés se retrouvent dans les deux queues des distributions conjointes.



Dans les figures qui précèdent on peut imaginer le potentiel et les possibilités de simulations que nous procure l'utilisation des copules pour mieux analyser et comprendre les comportements conjoints des marchés financiers. Dans ce document l'emphase est mise sur la nécessité de dissocier la copule des marges qui entrent dans la composition d'une distribution de variables aléatoires multivariées. L'information fournie par les copules est beaucoup plus riche que celle fournie par les mesures traditionnelles de dépendance, comme par exemple les corrélations linéaires ou les analyses de régressions. Si elles sont utilisées pour la valorisation de titres financiers dont le prix repose sur plus d'un sous-jacents, l'utilisation des copules permet de simuler correctement les structures de dépendances qui unissent les différents marchés, nous pouvons utiliser les copules pour la valorisation d'options sur plus de deux actifs sous-jacents. Les copules permettent aussi une analyse complète de l'effet de diversification d'un portefeuille par l'ajout de fonds de couverture par exemple.

L'OBJECTIF DE LA THÈSE est de montrer l'importance et l'utilité de la théorie mathématique des copules pour la finance de marché. La motivation première de ces applications réside dans le fait que les comportements des rendements des marchés financiers s'éloignent de la normalité. Ainsi, les méthodes statistiques traditionnelles, reposant sur l'hypothèse de la normalité des distributions des rendements, ne peuvent pas toujours être appliquées à la finance de marché. Cette thèse fournit les outils pour remédier à cette lacune. Elle se divise en cinq chapitres; chacun des chapitres explore les nombreuses applications des copules à la finance de marché.

Le premier chapitre est une introduction mathématique aux copules. On y retrouve les principaux théorèmes qui serviront de base aux chapitres suivants. Dans ce chapitre on y introduit aussi les copules hiérarchiques.

Le deuxième chapitre traite de la dépendance entre les marchés financiers. Cette partie a pour but de voir comment l'utilisation des copules en finance permet de combler les lacunes découlant de l'utilisation du coefficient de corrélation linéaire. Nous allons montrer que l'utilisation des copules, en plus de permettre une allocation plus efficace des ressources financières dans un portefeuille, apporte une meilleure compréhension des risques auxquels un portefeuille est exposé. Dans ce chapitre nous passerons en revue les différentes mesures de corrélations qui sont habituellement utilisées en finance de marché. Nous allons aussi montrer que les corrélations de rangs, tel le tau de Kendall ou le rho de Spearman sont de meilleures mesures que le coefficient de corrélation linéaire pour quantifier la corrélation entre les marchés financiers.

Dans ce chapitre nous allons aussi examiner l'application des diagrammes *chi-plot* développés par Fisher et Switzer 1981 (13) pour visualiser la structure de dépendance qui unit les marchés financiers.

Les différentes méthodes de mesure du risque de marché d'un portefeuille seront ensuite comparées avec les méthodes qui découlent des copules.

Le troisième chapitre est consacré à la valorisation d'une option sur plus d'un actif

financier. Les modèles à copules gaussiennes sont utilisés pour cette démarche. Dans un premier temps nous considérerons un modèle d'évaluation pour une option dont la valeur repose sur le minimum ou le maximum du cours boursier de deux actifs financiers. Dans ce modèle, à la fois les fonctions marginales et la copule sont gaussiennes. Les résultats obtenus par cette méthodologie sont ensuite comparés aux résultats obtenus par des méthodes utilisées en finance de marché, en l'occurrence celle développée par Stulz, une formule analytique pour le cas d'une option de type européen sur deux actifs sous-jacents. La méthode sera ensuite étendue aux copules de type archimédien tel la copule de Clayton, Gumbel et Frank¹. La méthodologie basée sur l'utilisation des copules est ensuite appliquée aux cas de plusieurs actifs financiers sous-jacents. Les valeurs d'options, sur plus de deux actifs financiers, obtenues par cette méthodologie est validée avec l'utilisation de simulations de Monte Carlo.

Le quatrième chapitre est consacré à l'analyse et aux effets de diversification apportés par l'inclusion de fonds de couverture dans un portefeuille. Il existe plusieurs types de fonds de couverture, chacun avec un niveau de risque différent, nous en mesurons l'impact sur un portefeuille, selon le type choisi. Pour ce chapitre nous disposons d'une banque de données de rendements mensuels pour 199 fonds de couverture. Sept types différents de fonds de couverture y sont présents, il s'agit de : *arbitrage*, *event driven*, *equity hedge*, *global macro*, *market long short*, *market neutral*, *relative value* et *short sellers*. Dans cette démarche la théorie des copules est appliquée à l'étude les comportements conjoints des fonds de couverture entre eux et les comportements conjoints de fonds de couverture avec les investissements traditionnels de portefeuille. Afin d'isoler la structure de dépendance, les modèles de copules elliptiques et archimédiennes sont appliqués. Pour les modèles elliptiques le modèle de copules gaussiennes est testé. Pour les copules de types archimédiennes, les copules de Clayton, Gumbel et Frank sont choisies. Le modèle de copules de Clayton présente une plus forte dépendance dans la partie inférieure de la distribution, celle de Gumbel dans

¹À partir des travaux de Genest et MacKay 1986 (17).

la partie supérieure alors que celle de Frank s'observe à la fois dans les parties inférieures et supérieures des distributions des rendements. Les simulations des marges sont basées sur un modèle GARCH(1,1).

Le cinquième chapitre Le cinquième chapitre a été rédigé à l'intention des gestionnaires de caisses de retraite. Nous mettons en lumière les carences liées aux choix des actifs découlant de l'application des techniques d'optimisation quadratiques : par exemple les titres risqués choisis à partir de la frontière efficiente proposée par Markowitz 1952. Nous montrons que la diversification, construite pendant les périodes dites normales de marché, ne fonctionne pas bien durant les périodes tumultueuses de l'économie. Les comportements des portefeuilles, mesurés selon les hypothèses de normalité donnent des conclusions différentes dépendant de la période de volatilité.

Nous montrons aussi que les copules sont des outils mathématiques attrayants pour comprendre et quantifier la dépendance selon toutes périodes de volatilités de marché. Ce chapitre ouvrira ultérieurement la porte à l'introduction des copules comme outils de mesure des risques et de dépendance entre les différents actifs au sein des caisses de retraite.

Dans ce chapitre nous jetons un oeil nouveau sur la diversification et la mesure du risque à partir des copules.

Chapitre I

INTRODUCTION MATHÉMATIQUE

1.1 Définitions mathématiques

Dans cette section nous présentons une introduction mathématique aux copules. Les copules permettent d'identifier et de quantifier la force de dépendance qui existe entre deux ou plusieurs variables aléatoires. Les variables aléatoires dans ce document représentent les comportements des rendements d'actifs financiers.

1.1.1 Définitions et théorèmes

Avec d variables aléatoires X_1, \dots, X_d , la loi de distribution conjointe de (X_1, \dots, X_d) est :

$$H(x_1, \dots, x_d) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d),$$

et les marges ont pour loi :

$$F_i(x_i) = \mathbb{P}(X_i \leq x_i) \quad i = 1, \dots, d.$$

Les fonctions de densités, lorsqu'elles existent, sont données par :

$$\begin{aligned} f_i(x_i) &= \frac{\partial F_i(x_i)}{\partial x_i} \quad i = 1, \dots, d \text{ et} \\ h(x_1, \dots, x_d) &= \frac{\partial^d H(x_1, \dots, x_d)}{\partial x_1 \dots \partial x_d}. \end{aligned}$$

Une copule C permet d'isoler la dépendance entre d variables aléatoires X_1, \dots, X_d par le biais de la fonction H suivante :

$$H(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)), \quad x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Définition 1.1.1 (Copule) *Une copule est une fonction de répartition dont les marges sont uniformes sur $(0, 1)$.*

En d'autres mots, si les variables aléatoires : U_1, \dots, U_d , sont de loi $U(0, 1)$, alors la fonction $C : [0, 1]^d \mapsto [0, 1]$ est une copule si :

$$C(u_1, \dots, u_d) = \mathbb{P}(U_1 \leq u_1, \dots, U_d \leq u_d). \quad (1.2)$$

En faisant varier F_1, \dots ou F_d , dans l'équation (1.1) la fonction C de l'équation (1.2) demeure inchangée. En d'autres termes si on change les marges, la structure de dépendance (la copule) demeure intacte.

Fonction de densité conjointe de dimension-d

Si nous avons une distribution multivariée, absolument continue, elle admet alors une densité conjointe :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_d) = c(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)) \prod_{i=1}^d f_i(x_i), \quad (1.3)$$

C la fonction de densité de la copule est donnée par la dérivée partielle suivante :

$$c(u_1, u_2, \dots, u_d) = \frac{\partial^d C(u_1, u_2, \dots, u_d)}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_d}.$$

Théorème de Sklar

Le théorème de Sklar (1959) est à la base des copules et il s'énonce de la façon suivante :

Théorème 1 (Théorème de Sklar) *Si H est une fonction de répartition conjointe avec des marges F_1, F_2, \dots, F_d . Alors, il existe une copule C telle que pour tout $x_1, x_2, \dots, x_d \in \overline{\mathbb{R}}$:*

$$H(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)), \quad (1.4)$$

si F_1, \dots, F_d , sont continues, alors C est unique, sinon C est déterminée sur $\text{image}F_1 \times \dots \times \text{image}F_d$. Réciproquement si C est une copule et F_1, \dots, F_d sont des fonctions de répartition, alors la fonction \mathbf{H} , définie par l'équation (1.4) est une fonction de répartition conjointe avec les marges F_1, \dots, F_d .

Corollaire 1 (Sklar) *Si H est une fonction de répartition conjointe avec les marges F_1, \dots, F_d , alors $F_1^{-1}, \dots, F_d^{-1}$ sont les fonctions inverses de F_1, \dots, F_d . Avec :*

$$F_j^{-1} = \inf \{x; F_j(x) \geq u\}, \quad u \in (0, 1).$$

Alors pour tout $(u_1, \dots, u_d) \in \text{domaine } C$:

$$C(u_1, \dots, u_d) = H(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)). \quad (1.5)$$

Le théorème de Sklar implique que pour une distribution conjointe multivariée et continue, les marges et la structure de dépendance peuvent être dissociées de façon unique. De plus, la structure de dépendance est représentée par la copule C .

Théorème 2 (Bornes de Fréchet-Hoeffding) $\forall (u_1, \dots, u_d) \in \text{domaine de } C$ nous avons :

$$\begin{aligned} W(u_1, \dots, u_d) &= \max(u_1 + \dots + u_d - d, 0) \leq C(u_1, \dots, u_d) \\ &\leq \min(u_1, \dots, u_d) = M(u_1, \dots, u_d). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Le théorème de Fréchet-Hoeffding implique qu'une copule (mesure de dépendance) est bornée, elle se trouve à l'intérieur d'un minimum et d'un maximum. Pour les distributions conjointes bivariées, les bornes inférieures et supérieures de Fréchet-Hoeffding sont des copules. W et M sont les copules des vecteurs aléatoires $(U, 1 - U)$ et (U, U) respectivement, U étant de loi uniforme sur $[0, 1]$. Dans ce cas, W représente la parfaite

dépendance négative et M la parfaite dépendance positive. Notons que pour les copules de dimensions $n > 2$, W n'est pas une copule.

Les théorèmes (1) et (2) ont de nombreuses implications pratiques. Vu que les mesures obtenues par les copules sont bornées, cela implique que ces mesures existent toujours. Les copules sont de plus invariantes sous les transformations monotones croissantes de leurs marges.

1.1.2 Modèles de copules

Copules elliptiques

Les copules elliptiques sont faciles à simuler, leurs représentations ne présentent cependant pas de formes fermées, elles sont symétriques. Les deux classes les plus utilisées de copules elliptiques sont les copules gaussiennes et les copules de Student.

Copule gaussienne

Définition 1.1.2 (Copule gaussienne bivariée) *La copule gaussienne est définie par :*

$$C_{Ga}(u, v) = \Phi_{\rho_{XY}}(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)), \quad (1.7)$$

$\Phi_{\rho_{XY}}$ est la fonction de répartition conjointe de deux variables normales centrées réduites, avec un coefficient de corrélation ρ , Φ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite. En conséquence :

$$\Phi_{\rho_{XY}}(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{2\rho st - s^2 - t^2}{2(1-\rho^2)}} ds dt.$$

Cette fonction peut aussi prendre la forme :

$$C_{Ga}(u, v) = \int_0^u \int_0^v \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} e^{\frac{2\rho xy - x^2 - y^2}{2(1-\rho^2)} + \frac{x^2 + y^2}{2}} ds dt$$

avec $x = \Phi^{-1}(u)$ et $y = \Phi^{-1}(v)$, et u et v de loi $U[0, 1]$.

Fonction de densité et fonction répartition

La fonction de densité :

$$c(u_1, u_2, \rho) = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x_1^2+x_2^2-2\rho x_1 x_2}{2(1-\rho^2)} + \frac{x_1^2+x_2^2}{2}}$$

et la fonction répartition :

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2, \rho) &= \int_0^{u_1} \int_0^{u_2} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x_1^2+x_2^2-2\rho x_1 x_2}{2(1-\rho^2)} + \frac{x_1^2+x_2^2}{2}} dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{x_1^2+x_2^2-2\rho x_1 x_2}{2(1-\rho^2)}} dy dx. \end{aligned}$$

Copule gaussienne multivariée

La copule gaussienne multivariée s'applique à une fonction de répartition conjointe avec la matrice des corrélations R , elle est définie par :

$$C_R(u_1, \dots, u_d) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)), \quad (1.8)$$

Φ_R est la fonction de répartition des variables conjointes, les variables sont normales et standardisées et ont une matrice de corrélations R . On peut y trouver plusieurs applications, entre autres la valorisation d'options basées sur un panier de titres selon les hypothèses sous-jacentes au modèle de Black et Scholes. Dans cet exemple, la distribution conjointe, neutre au risque, peut être définie à l'aide d'une copule gaussienne multivariée. Cette partie sera détaillée au chapitre III.

L'équation (1.3) peut aussi s'écrire par la fonction de densité de la copule gaussienne :

$$c_R(u_1, \dots, u_d) = \frac{1}{|R|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^\top (R^{-1} - \mathbf{I}) \mathbf{x}\right), \quad (1.9)$$

R est la matrice des corrélations, \mathbf{I} une matrice identité de dimension $d \times d$ et $x_i = \Phi^{-1}(u_i)$. De plus, d'après 1.8 :

$$\begin{aligned}
C_R^{G^a}(\mathbf{u}) &= \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)), \\
&= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u_d)} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |R|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^\top R^{-1} \mathbf{x}\right) dx_1 \dots dx_d.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Même si les corrélations de rangs se prêtent mieux à l'analyse d'une distribution conjointe de données financières que les corrélations linéaires, il existe une correspondance entre le coefficient de corrélation linéaire ρ , le tau de Kendall τ et le rhô de Spearman ϱ .

Tau de Kendall et Rhô de Spearman en fonction du coefficient de corrélation linéaire ρ :

Le tau de Kendall pour une copule gaussienne est donné par :

$$\tau_K = \frac{2}{\pi} \arcsin \rho$$

et le Rhô de Spearman est donné par la relation suivante :

$$\varrho_S = \frac{6}{\pi} \arcsin \frac{\rho}{2}.$$

Les copules gaussiennes ne captent pas la dépendance dans les queues des distributions.

Copule de Student

Définition 1.1.3 (Copule de Student bvariée) *La copule de Student- $t_{\rho,\nu}$ est définie par l'équation :*

$$t_{\rho,\nu}(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \left(1 + \frac{s^2 + t^2 - 2\rho st}{\nu(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} ds dt. \tag{1.11}$$

Densité de la copule de Student

La densité de la copule de Student $t_{\nu,\rho}$ est donnée par l'équation :

$$c_{\rho,\nu}(u, v) = \rho^{-\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)^2} \frac{\left(1 + \frac{\varsigma_1^2 + \varsigma_2^2 - 2\rho\varsigma_1\varsigma_2}{\nu(1-\rho^2)}\right)^{-(\nu+2)/2}}{\prod_{j=1}^2 \left(1 + \frac{\varsigma_j^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}} \quad (1.12)$$

avec $\varsigma_1 = t_\nu^{-1}(u)$, $\varsigma_2 = t_\nu^{-1}(v)$.

Copule de Student multivariée

Comme dans le cas de la copule gaussienne multivariée, la copule de Student est la fonction de dépendance associée à une distribution de Student multidimensionnelle.

En se référant à l'équation (1.3) on peut formuler la fonction de densité de la copule de Student multivariée :

$$c_{\nu,\rho}(u_1, \dots, u_d) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+d}{2}\right)}{|\rho|^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}\right)^d \times \frac{\left(1 + \frac{1}{\nu} \mathbf{x}^\top \rho^{-1} \mathbf{x}\right)^{-(\nu+d)/2}}{\prod_{i=1}^d \left(1 + \frac{1}{\nu} x_i^2\right)^{-(\nu+1)/2}}, \quad (1.13)$$

avec $x_i = T^{-1}(u_i)$, $i = 1, \dots, d$. Et

$$t_{\rho,\nu}(x_1, \dots, x_d) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_d} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+d}{2}\right)}{|\rho|^{\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) (\nu\pi)^{\frac{d}{2}}} \left(1 + \frac{\nu}{2} \mathbf{y}^\top \rho^{-1} \mathbf{y}\right)^{-\frac{\nu+d}{2}} dy.$$

Tau de Kendall et Rhô de Spearman pour une distribution de Student en fonction du coefficient de corrélation linéaire ρ :

Il n'existe pas, à notre connaissance, de formule qui donne l'équivalent entre le coefficient de corrélation linéaire et le rhô de Spearman pour les distributions de Student. Alors qu'en fait, la relation qui s'applique pour le τ de Kendall pour la copule gaussienne s'applique aussi pour la copule de Student :

$$\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho).$$

La copule de Student, selon le nombre de degrés de liberté ν , permet la simulation d'un plus grand nombre de points regroupés dans les queues des distributions que les

copules gaussiennes. À la limite, lorsque $\nu \rightarrow \infty$, la copule de Student tend vers la copule gaussienne. À la figure 1.1 on remarque un plus fort regroupement des couples de points pour la copule de Student que pour la copule gaussienne pour un même coefficient de corrélation.

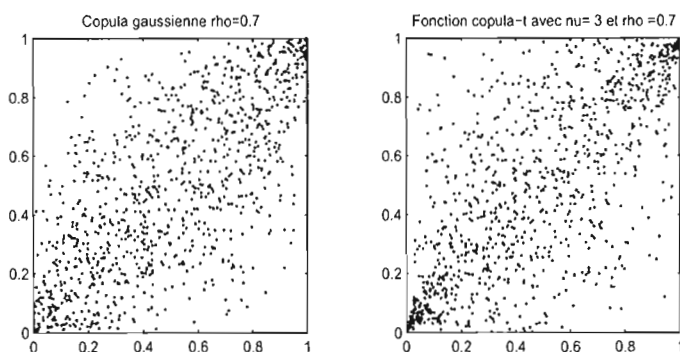


FIG. 1.1 – Paires de la copule normale et Student-t ($\nu = 3$) bivariées avec un tau de Kendall 0.49.

Copules archimédiennes

Les copules elliptiques, même si elles sont faciles à simuler, ne présentent pas de solutions à formes fermées et elles sont symétriques. Les copules archimédiennes ont un avantage sur les copules elliptiques. Ce sont des classes très populaires et elles sont utilisées en science actuarielle et en finance de marché pour modéliser la dépendance entre les marchés financiers ou les classes d'actifs. La classe de copules archimédiennes comporte cependant un inconvénient important qui réside dans le choix limité de ses paramètres. Par exemple, si nous simulons le comportement conjoint de plusieurs marchés ou titres financiers à la fois, le même paramètre doit s'appliquer pour chaque ensemble de variables aléatoires qui forment la copule. Une des solutions possible au problème du choix limité des paramètres pour une copule de type archimédienne est l'utilisation de la copule archimédienne hiérarchique. Cette copule permet un paramètre différent pour chaque copule dans la hiérarchie. La méthodologie pour la construction des copules archimédiennes est exposée dans l'ouvrage de Nelsen (26) p. 89.

La classe de copules archimédiennes est une classe importante. Il y a plusieurs raisons qui justifient leurs utilisations, en autres :

1. Grande variété de familles paramétriques,
2. Une grande possibilité de structures de dépendance,
3. Ses membres possèdent de belles propriétés,
4. Elles peuvent être construites et simulées assez facilement.

Nous devons en grande partie à Genest et MacKay (17) et Genest et Rivest (20) la formalisation de la théorie des copules archimédiennes. Une copule est dite *archimédienne* si elle s'exprime sous la forme suivante :

$$C_{\varphi}(u, v) = \varphi^{-1} \{ \varphi(u) + \varphi(v) \}, \quad 0 < u, v < 1. \quad (1.14)$$

La fonction génératrice de la copule $\varphi(w)$ est une fonction convexe décroissante sur $(0, 1)$. Cette copule est déterminée de façon unique par la fonction :

$$K(w) = w - \frac{\varphi(w)}{\varphi'(w)}. \quad (1.15)$$

la fonction $K(w)$ est définie sur $[0, 1]$. Les données issues d'une distribution bivariable peuvent être modélisées par une copule de type archimédien. La fonction de probabilité propre aux copules archimédiennes découle de la proposition 1 :

Proposition 1 (Structure de probabilité d'une copule archimédienne) *Si X et Y sont deux variables aléatoires liées par une fonction de dépendance $C(u, v)$ de la forme $\varphi^{-1} \{ \varphi(u) + \varphi(v) \}$, elles ont alors comme générateur une fonction décroissante convexe φ définie sur $(0, 1]$ avec $\varphi(1) = 0$.*

La preuve de cette proposition est présentée en annexe de l'article de Genest et Rivest (20).

Théorème 3 (Fonction copule bivariable) *Posons φ une fonction continue strictement décroissante de $I \mapsto [0, \infty]$ tel que $\varphi(1) = 0$. La fonction inverse de φ est la*

fonction $\varphi^{[-1]}$ a pour domaine $\text{Dom } \varphi^{[-1]} = [0, \infty]$ et pour image $\text{Image } \varphi^{[-1]} = \mathbf{I}$. φ est donnée par :

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & , 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0 & , \varphi(0) \leq t \leq \infty. \end{cases}$$

Définition 1.1.4 *Étant donné un générateur et son inverse, une copule archimédienne C est générée par :*

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)). \quad (1.16)$$

C est une fonction copule si et seulement si φ est convexe.

Il a été montré par Genest et MacKay (1986) (17), que le tau de Kendall, pour les copules archimédiennes, est donné par l'identité suivante :

$$\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt. \quad (1.17)$$

Une grande variété de copules archimédiennes ont été cataloguées par Nelsen (26), elles sont présentées à l'Annexe A. Pour la mesure de dépendance entre différents marchés financiers nous utiliserons les trois types de fonctions copules archimédiennes :

1. Clayton :

$$C(u, v) = \left(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1 \right)^{-1/\theta}, \text{ avec } \theta \in (0, \infty), \quad (1.18)$$

2. Gumbel :

$$C(u, v) = \exp \left\{ - \left[(-\log u)^{\frac{1}{\theta}} + (-\log v)^{\frac{1}{\theta}} \right]^{\theta} \right\}, \text{ avec } \theta \in (0, \infty) \quad (1.19)$$

3. et Frank :

$$C(u, v) = \log \left(\frac{\theta + \theta^{u+v} - \theta^u - \theta^v}{\theta - 1} \right) / \log(\theta), \text{ avec } \theta \in (0, \infty). \quad (1.20)$$

Puisque que $\lambda(u)$ est basé sur la décomposition du τ de Kendall, il est pratique de baser l'estimation du paramètre θ de la copule à partir de l'estimation du paramètre sur la statistique τ_n . $\tau(X, Y) = 4\mathbb{E}(V) - 1$, alors la fonction $\lambda(u)$ peut être calculée par l'espérance :

$$\tau = 4\mathbb{E}(V) - 1 = 4 \int_0^1 \lambda(u) dv + 1.$$

Cette méthode simple d'estimation est opérationnelle pour les familles de copules archimédiennes : Clayton, Gumbel et Frank (Genest MacKay 1986). Chacun de ces types de copules de la famille archimédienne ont une fonction génératrice de copules présentées au tableau 1.1.

TAB. 1.1 – Copules de la famille archimédienne

	φ Fonction génératrice	$\theta \in$ Paramètre	τ de Kendall
Clayton	$\frac{1}{\theta}(v^{-\theta} - 1)$	$(0, \infty)$	$\frac{1}{1+2\theta}$
Gumbel	$(-\log(v))^{1/\theta}$	$(0, \infty)$	$1 - \theta$
Frank	$-\log\left(\frac{1-\theta^t}{1-\theta}\right)$	$(-\infty, \infty)$	$\frac{1+4(D_1(\theta)-1)}{\theta}^\dagger$

$$\dagger \quad D_k(\theta) = \frac{k}{\theta} \int_0^\theta \frac{t^k}{(e^t-1)} dt$$

Extension au cas multivarié

Définition 1.1.5 En généralisant l'équation 1.16 pour $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)$ nous obtenons :

$$C^d(\mathbf{u}) = \varphi^{1-d}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \dots + \varphi(u_d)). \quad (1.21)$$

Avec la fonction génératrice de copules $\varphi : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}^+$ et $\varphi(1) = 0$ et $\varphi(0) = \infty$.

Définition 1.1.6 (Transformée de Laplace) Soit Y une variable aléatoire non négative avec une fonction de répartition $G(Y)$ et une fonction de densité de $g(y)$ (si elle existe). Alors :

1. La transformée de Laplace de la variable aléatoire Y est définie par :

$$\mathcal{L}_y(t) := \mathbb{E} [e^{-tY}] = \int_0^\infty e^{-ty} dG(y) = \int_0^\infty e^{-ty} g(y) dy =: \mathcal{L}_g(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (1.22)$$

2. Soit $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$. Si une solution existe, la transformée inverse de Laplace $\mathcal{L}_\psi^{[-1]}$ de ψ est définie par la fonction $\chi : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$ qui est la solution de :

$$\mathcal{L}_\chi(t) = \int_0^\infty e^{-ty} \chi(y) dy = \psi(t), \quad \forall t \geq 0.$$

3. La répartition de Y est caractérisée par sa transformée de Laplace.

Marshall et Olkin (1988) (25) dans leur travaux ont proposé une méthodologie pour simuler les copules, cette méthodologie est exposée à la proposition 2.

Proposition 2 (Marshall-Olkin (1988)) Générer $E_1, \dots, E_d \sim \text{Exp}(1)$ indépendantes, c'est-à-dire $\mathbb{P}(E_i > t) = e^{-t}$ et S la transformée de Laplace de φ^{-1} . Si $U_i = \varphi^{-1}\left(\frac{E_i}{S}\right)$, pour $1 \leq i \leq d$, on a $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_d) \sim C$, la variable $V = C(\mathbf{U})$ est générée par $\varphi^{-1}\left(\frac{E_i}{S}\right)$ où $E \sim \Gamma(d, 1)$.

Le générateur et l'inverse de la copule de Clayton

Le générateur :

$$\varphi(u) = \frac{1}{\theta} \left(u^{-\theta} - 1 \right),$$

son inverse :

$$\varphi^{-1}(t) = (t + 1)^{-1/\theta}.$$

En appliquant l'équation (1.16) on obtient pour la copule archimédienne de Clayton :

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2) &= \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)), \\ &= \varphi^{-1}(u_1^{-\theta} - 1 + u_2^{-\theta} - 1) \text{ par le générateur,} \\ &= \left(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1 \right)^{-1/\theta} \text{ en appliquant son inverse.} \end{aligned}$$

TAB. 1.2 – Générateur de copules archimédiennes ainsi que leurs transformées de Laplace

	Copule archimédienne		
	Clayton	Gumbel	Frank
$\varphi(t)$	$\frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$	$(-\log t)^{\frac{1}{\theta}}$	$-\log \left[\frac{1-\theta^t}{1-\theta} \right]$
$\varphi^{[-1]}(s)$	$(1 + \theta s)^\theta$	$e^{(-s^{1/\theta})}$	$\log [(1 - \theta)(1 - e^{-s})]$
Paramètre	$\theta > 0$	$\theta \geq 0$	$\theta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
Répartition de Y	$\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{\theta})}$	α -stable, $\alpha = \frac{1}{\theta}$	Série log sur \mathbb{N}^+ , $\alpha = (1 - c^{-\theta})$
Densité de Y	$\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{\theta})} e^{-y} y^{(1-\theta)/\theta}$	Pas de forme connue	$\mathbb{P}[Y = k] = -\frac{1}{\log(1-\alpha)} \frac{\alpha^k}{k}$

Source Marshall et Olkin (1988) (25) et Schönbucher (31).

La copule de Clayton multivariée pour $\theta > 0$ est donné par :

$$C(u_1, u_2, \dots, u_d) = \left(\sum_{i=1}^d u_i^{-\theta} - d + 1 \right)^{-\frac{1}{\theta}}. \quad (1.23)$$

Notons que $C_0(\mathbf{u}) = \lim_{\theta \rightarrow 0} C_\theta(\mathbf{u}) = C^\perp(\mathbf{u})$.

Si par compte $C_1(\mathbf{u}) = \lim_{\theta \rightarrow 1} C_\theta(\mathbf{u}) = C^+(\mathbf{u})$ pour tout $\mathbf{u} \in [0, 1]^d$. Pour $d = 2$ nous avons $C_{-1} = C^-$. On obtient l'indépendance pour $\theta = 0$ et la borne supérieure de Fréchet-Hoeffding est atteinte à $\theta = 1$.

Le générateur et l'inverse de la copule de Gumbel

Le énérateur :

$$\varphi(u) = (-\log(u))^{\frac{1}{\theta}},$$

son inverse :

$$\varphi^{-1}(t) = \exp\left(-t^{\frac{1}{\theta}}\right).$$

En appliquant l'équation (1.16) on obtient la copule archimédienne de Gumbel :

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2) &= \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)), \\ &= \varphi^{-1}\left(\left(-\log u_1\right)^{\frac{1}{\theta}} + \left(-\log u_2\right)^{\frac{1}{\theta}}\right) \text{ par le générateur,} \\ &= e^{\left\{-\left[\left(-\log u_1\right)^{1/\theta} + \left(-\log u_2\right)^{1/\theta}\right]^\theta\right\}} \text{ en appliquant son inverse.} \end{aligned}$$

La copule de Gumbel multivariée est donné par :

$$C(u_1, u_2, \dots, u_d) = \exp\left[-\left(\sum_{i=1}^d \left(-\log u_i\right)^{\frac{1}{\theta}}\right)^\theta\right], \quad (1.24)$$

$C_1 = C^\perp$ et $\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_\theta = C^+$ est la borne supérieure de Fréchet-Hoeffding.

Le générateur et l'inverse de la copule de Frank

Le générateur :

$$\varphi(t) = -\log\left(\frac{1 - \theta^t}{1 - \theta}\right),$$

son inverse :

$$\begin{aligned} s &= -\log\left(\frac{1 - \theta^t}{1 - \theta}\right), \\ e^{-s}(1 - \theta) &= 1 - \theta^t, \\ \theta^t &= 1 - e^{-s}(1 - \theta), \\ t &= \frac{\log[1 - e^{-s}(1 - \theta)]}{\log \theta}. \end{aligned}$$

$$\varphi^{-1}(t) = \frac{\log[1 - e^{-s}(1 - \theta)]}{\log \theta}.$$

En appliquant l'équation (1.16) on obtient la copule archimédienne de Frank :

$$\begin{aligned}
C(u_1, u_2) &= \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)), \\
&= \varphi^{-1} \left[- \left(\log \left(\frac{1 - \theta^{u_1}}{1 - \theta} \right) + \log \left(\frac{1 - \theta^{u_2}}{1 - \theta} \right) \right) \right], \\
&= \varphi^{-1} \left[- \left(\log \left(\frac{1 - \theta^{u_1}}{1 - \theta} \right) \left(\frac{1 - \theta^{u_2}}{1 - \theta} \right) \right) \right], \\
&= \log \left\{ 1 - (1 - \theta) e^{\log \left(\frac{1 - \theta^{u_1}}{1 - \theta} \right) \left(\frac{1 - \theta^{u_2}}{1 - \theta} \right)} \right\} / \log(\theta), \\
&= \log \left\{ 1 - (1 - \theta) \left(\frac{1 - \theta^{u_1}}{1 - \theta} \right) \left(\frac{1 - \theta^{u_2}}{1 - \theta} \right) \right\} / \log(\theta), \\
&= \log \left(\frac{\theta^{u_1} + \theta^{u_2} - \theta^{u_1 + u_2} - \theta}{1 - \theta} \right) / \log(\theta).
\end{aligned}$$

La copule de Frank multivariée est donnée par :

$$C(u_1, u_2, \dots, u_d) = \log \left\{ 1 - (1 - \theta) \prod_{i=1}^d \left(\frac{1 - \theta^{u_i}}{1 - \theta} \right) \right\} / \log(\theta), \quad (1.25)$$

avec $\theta > 0$ quand $d \geq 3$. Pour $d = 2$ nous avons $\theta \in (-\infty, \infty)$, la copule de Frank admet la dépendance négative.

1.2 Calculer le paramètre d'une copule archimédienne

Estimer les paramètres d'une copule n'est pas une tâche toujours facile comme en témoigne la citation suivante :

...Inference for copula models is, to an extent, still under development. The literature on the subject is yet to be collated, and most of it is not written with the end user in mind, making difficult to decipher except for the most mathematically inclined...

Genest et Fabre (16).

Selon Barbe et al. (4) et Rémillard (27) nous avons :

$$f_i(t) = \frac{d^{i+1}}{ds^{i+1}} \phi^{-1} \Big|_{s=\phi(t)}, \quad 0 \leq i \leq d-1.$$

Alors $f_0(t) = 1/\phi'(t)$, et pour $1 \leq i \leq d-1$ on a :

$$f_i(t) = \frac{f'_{i-1}}{\phi'(t)}.$$

De plus la fonction de densité de la copule $C = \phi^{-1} \{ \phi(u_1) + \dots + \phi(u_d) \}$, pour tout $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d) \in (0, 1)^d$, est donné par :

$$c(\mathbf{u}) = f_{d-1} \{ C(\mathbf{u}) \} \prod_{i=1}^d \phi'(u_i).$$

Exemple d'application à une copule archimédienne de Clayton de dimension $d = 2$.

La densité d'une copule de Clayton est $\phi(u) = u^{-\theta} - 1$ et son inverse

$\phi^{-1}(t) = (t + 1)^{-1/\theta}$. La densité $c(u_1, u_2)$ de paramètre θ , pour la copule de Clayton se calcule de la façon suivante :

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2) &= \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2)), \\ &= \phi^{-1}(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 2), \\ &= (u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}. \end{aligned}$$

En calculant les dérivées nous obtenons :

$$\begin{aligned} f_1 &= -\frac{1}{\theta} \left(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1 \right)^{-1/\theta-1}, \\ f_2 &= \frac{1}{\theta} \left(\frac{1}{\theta} + 1 \right) \left(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1 \right)^{-1/\theta-2}, \\ \prod_{i=1}^d \phi'(u_i) &= \theta^2 (u_1 u_2)^{-\theta-1}, \\ c(u_1, u_2, \theta) &= (1 + \theta) (u_1 u_2)^{-\theta-1} \left(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1 \right)^{-1/\theta-2}. \end{aligned}$$

Par exemple pour calculer la densité d'une copule archimédienne de Clayton, nous pouvons tout aussi bien calculer la valeur de :

$$\frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2},$$

ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} &= -\frac{1}{\theta} \left(-\theta u_1^{-\theta-1} \right) \left(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1 \right)^{-1/\theta-1}, \\ \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} &= \theta \left(\frac{1}{\theta} + 1 \right) (u_1 u_2)^{-\theta-1} \left(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1 \right)^{-1/\theta-2}. \end{aligned}$$

Afin de trouver l'estimateur de vraisemblance maximale il suffit de prendre la fonction logarithmique de la fonction de densité de la copule :

$$\text{MLE} = \log(1 + \theta) - (\theta + 1) (\log u_1 + \log u_2) - \left(\frac{1}{\theta} + 2 \right) \log \left(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1 \right).$$

Si les rendements sont utilisés, leurs rangs devront être normalisés pour avoir deux distributions uniformes sur $(0, 1)$. En appliquant cette méthode de calcul aux données mensuelles des marchés canadien et américain pour la période 1970 à 2007 nous trouvons une valeur de $\theta = 1.45$, elle correspond à un tau de Kendall de $\tau = \theta/(\theta + 2) = 0.42$. Si par ailleurs le tau de Kendall est calculé à partir des données des rendements nous trouvons une valeur de 0.49 ; ce qui valide cette démarche.

Pour la copule archimédienne de Gumbel, la fonction de répartition est donnée par l'équation suivante :

$$C_G(u_1, u_2; \theta) = e^{-((- \log u_1)^\theta + (- \log u_2)^\theta)^{1/\theta}},$$

et sa fonction de densité par :

$$\begin{aligned} c_G(u_1, u_2, \theta) &= e^{-((- \log u_1)^\theta + (- \log u_2)^\theta)^{1/\theta}} (- \log u_1)^{\theta-1} (- \log u_2)^{\theta-1}, \\ &\quad \left(-1 + \theta + \left((- \log u_1)^\theta + (- \log u_2)^\theta \right)^{1/\theta} \right), \\ &\quad \left((- \log u_1)^\theta + (- \log u_2)^\theta \right)^{1/\theta-2} / (u_1 u_2). \end{aligned}$$

La même méthode de calcul pour la copule de Clayton peut être aussi utilisée pour la copule de Gumbel.

1.3 Copules hiérarchiques

Les copules gaussiennes ne modélisent pas bien les rendements boursiers, elles ne reproduisent pas adéquatement les queues des distributions. L'utilisation des copules archimédiennes, même si elles permettent de simuler les queues de distributions, elles deviennent restrictives pour les copules de dimensions plus grandes que deux. La copule dépend que d'un seul paramètre qui s'applique pour tous les marchés. L'utilisation des copules hiérarchiques permet de contourner les restrictions causées par les copules gaussiennes et les copules archimédiennes.

Les copules hiérarchiques sont conceptuellement simples mais exigent des efforts importants en termes de notations et de calculs.

Rappelons qu'une copule archimédienne de dimension d est une fonction $C : [0, 1]^d \mapsto [0, 1]$ définie par :

$$C(u_1, \dots, u_d) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_d)), \quad (1.26)$$

C est une copule archimédienne si et seulement si φ^{-1} est monotone sur $[0, \infty)$, c'est-à-dire :

$$(-1)^k \frac{\partial^k}{\partial u^k} \varphi^{-1}(u) \geq 0 \text{ pour } k \in \mathbb{N}.$$

φ est la fonction génératrice de la copule. La fonction génératrice n'a qu'un seul paramètre, noté θ . De plus, si $\varphi(0) = \infty$, φ est un générateur stricte et la copule est une copule archimédienne stricte. Selon Savu et Tiede 2006 (29), la plupart des copules utiles, de type archimédien, sont des copules strictes. On suppose alors que cette condition est satisfaite par ce qui suit.

Selon Joe (1997), les copules archimédiennes trouvent leurs formes dans le contexte des transformées de Laplace.

$$\psi = \varphi^{-1},$$

si $\psi(s)$ est une transformée de Laplace, alors

$$\psi(s) = \int_0^{\infty} e^{-sw} dM(w),$$

M est la fonction de répartition d'une variable aléatoire positive avec ($M(0) = 0$). Pour que la fonction (1.26) soit une fonction de répartition il est nécessaire que la fonction génératrice inverse φ^{-1} soit monotone. La classe de fonctions :

$$\mathcal{L}_d = \left\{ \psi : [0, 1] \mid \psi(0) = 1, \psi(\infty) = 0, (-1)^j \psi^{(j)} \geq 0, j = 1, \dots, d \right\}$$

pour $d \in \mathbb{N}$; \mathcal{L}_∞ est l'ensemble des transformés de Laplace de variables aléatoires strictement positives.

Alors, en utilisant cette notation, la condition nécessaire et suffisante pour que 1.26 soit une copule, pour toutes les dimensions $d \in \mathbb{N}$, il faut que $\varphi^{-1} \in \mathcal{L}_\infty$ et que φ soit monotone.

Il existe plusieurs façons de construire une hiérarchie, voici quelques exemples de hiérarchies, elles sont présentées aux figures 1.2 et 1.4 voir (1) et (3).

1.3.1 Copules hiérarchiques imbriquées «*fully nested copulas*»

Construction d'une copule hiérarchique imbriquée en 4 dimensions

À la figure 1.2, nous avons l'illustré une copule hiérarchique imbriquée de dimensions $d = 4$. Afin de construire l'équation de cette copule il est nécessaire de procéder étape par étape.

1. La première copule C_1 est composée des variables aléatoires u_1 et u_2 , alors :

$$C_1 = C_1(u_1, u_2) = \phi_1^{-1}(\phi_1(u_1) + \phi_1(u_2)), \quad (1.27)$$

2. La deuxième copule C_2 est composée de la variable aléatoire u_3 et de la copule

C_1 , alors :

$$\begin{aligned} C_2 &= C_2(C_1, u_3) = \phi_2^{-1}(\phi_2(C_1) + \phi_2(u_3)) \\ &= \phi_2^{-1}(\phi_2(\phi_1^{-1}(\phi_1(u_1) + \phi_1(u_2))) + \phi_2(u_3)), \end{aligned} \quad (1.28)$$

3. La troisième copule C_3 est composée de la variable aléatoire u_4 et de la copule C_2 , alors :

$$\begin{aligned} C_3 &= C_3(C_2, u_4) = \phi_3^{-1}(\phi_3(C_2) + \phi_3(u_4)) \\ &= \phi_3^{-1}(\phi_3(\phi_2^{-1}(\phi_2(\phi_1^{-1}(\phi_1(u_1) + \phi_1(u_2))) + \phi_2(u_3))) + \phi_3(u_4)). \end{aligned} \quad (1.29)$$

On remarque que la notation peut devenir rapidement très lourde. En posant $F \circ G(\cdot) = F(G(\cdot))$, l'équation (1.29) s'écrit de la façon suivante :

$$C(u_1, \dots, u_4) = \phi_3^{-1}(\phi_3 \circ \phi_2^{-1}(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}(\phi_1(u_1) + \phi_1(u_2)) + \phi_2(u_3)) + \phi_3(u_4)). \quad (1.30)$$

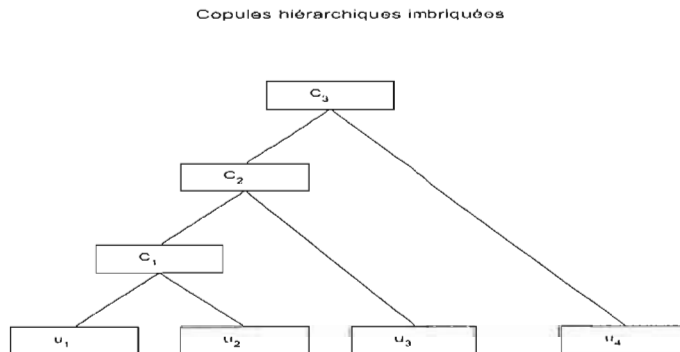


FIG. 1.2 – Copule hiérarchique imbriquée, (*fully nested copula*).

Si la dimension est de d , il est alors nécessaire d'utiliser $d-1$ fonctions génératrices, les copules archimédiennes qui composent la hiérarchie pourraient être toutes différentes.

La structure est relativement simple mais les fonctions pour l'exprimer deviennent rapidement complexes. L'équation (1.31) décrit la hiérarchie représentée par la figure

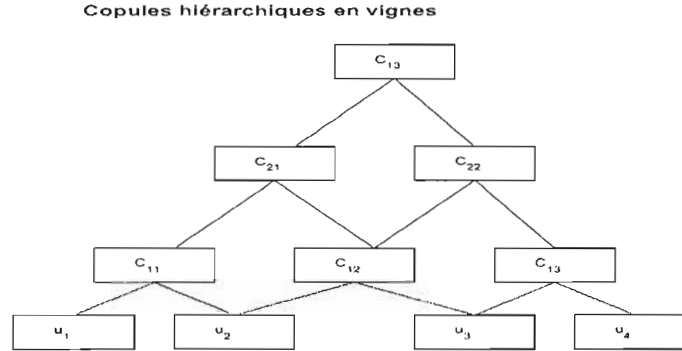


FIG. 1.3 – Construction d’une copule hiérarchique paire par paire.

1.2. La copule C_1 est formée à partir des variables u_1 et u_2 de loi $U(0, 1)$, une nouvelle copule (C_2) est formée en y ajoutant la variable u_3 , on ajoute à cette dernière copule la variable u_4 ce qui forme la copule C_3 . Nous continuons ainsi de suite de la même façon jusqu’à ce que la dimension d soit atteinte. Dans l’exemple pour quatre dimensions il est possible d’utiliser trois paramètres différents. On peut former $d(d - 1)/2$ paires de variables. Pour une copule de dimensions d , il nécessaire d’utiliser $d - 1$ générateurs : $\phi_1, \dots, \phi_{d-1}$, ainsi :

$$\begin{aligned}
 C(u_1, \dots, u_d) = & \\
 & \phi_{d-1}^{-1}(\phi_{d-1} \circ \phi_{d-2}^{-1} [\dots (\phi_2 \circ \phi_1^{-1} [\phi_1(u_1) + \phi_1(u_2)] + \phi_2(u_3)) \\
 & + \dots + \phi_{d-2}(u_{d-1})] + \phi_{d-1}(u_d)). \tag{1.31}
 \end{aligned}$$

Afin que les expressions données par (1.30) et par (1.31) soient des copules de dimensions d , il faut d’une part que le générateur inverse soit complètement monotone, il faut d’autre part que la condition se rapportant aux fonctions composées $\omega = \varphi_{i+1} \circ \varphi_i^{-1}$ soit satisfaite. C’est-à-dire :

$$\mathcal{L}_d^* = \left\{ \omega : [0, \infty) \mapsto [0, \infty) \mid \omega(0) = 0, \omega(\infty) = \infty, (-1)^{j-1} \omega^{(j)} \geq 0, j = 1, \dots, d \right\},$$

avec $d \in \mathbb{N}$. Les fonctions dans \mathcal{L}_d^* sont des compositions de la forme $\varphi_{i+1} \circ \varphi_i^{-1}$ avec φ_{i+1}^{-1} et $\varphi_i^{-1} \in \mathcal{L}_1$.

Un échantillon conditionnel est créé sur chacune des variables à partir de la copule, ainsi, à chaque dimension de la copule il est nécessaire d'ajouter une nouvelle variable.

1.3.2 Copules hiérarchiques partiellement imbriquées

Les classes de copules partiellement imbriquées¹ sont une généralisation des classes de copules imbriquées.

Copules hiérarchiques partiellement imbriquées

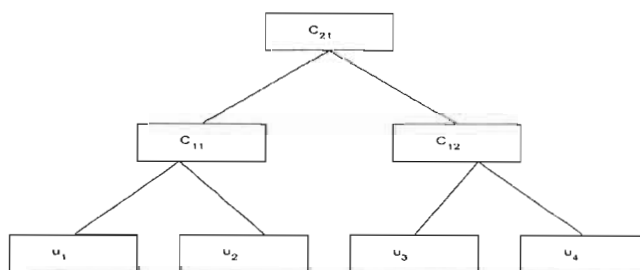


FIG. 1.4 – Structure d'une copule hiérarchique archimédienne de dimension quatre.

La plus petite dimension pour cette classe de copule est $d = 4$. La copule est donnée par la formule :

$$C(u_1, \dots, u_4) = \phi_{21}^{-1} \left(\phi_{21} \circ \phi_{11}^{-1} [\phi_{11}(u_1) + \phi_{11}(u_2)] \right. \\ \left. + \phi_{21} \circ \phi_{12}^{-1} [\phi_{12}(u_3) + \phi_{12}(u_4)] \right), \quad (1.32)$$

avec les trois générateurs ϕ_{21} , ϕ_{11} et ϕ_{12} .

Cadre de modélisation Dans leurs travaux Savu et Tiede (29) proposent un modèle, dont les copules archimédiennes sont imbriquées les unes dans les autres. À chaque niveau, une nouvelle copule est agrégée à la précédente. Finalement, au dernier niveau de la hiérarchie on obtient une distribution jointe de d variables aléatoires uniformes U_1, \dots, U_d . La distribution jointe est évaluée à $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$.

¹ «Partially nested copula».

L'équation 1.32 se réécrit de la façon suivante :

$$C(u_1, \dots, u_4) = \varphi_{21}^{-1} \left[\varphi_{21} \left(\varphi_{11}^{-1} (\varphi_{11}(u_1) + \varphi_{11}(u_2)) \right) + \varphi_{21} \left(\varphi_{12}^{-1} (\varphi_{12}(u_3) + \varphi_{12}(u_4)) \right) \right]. \quad (1.33)$$

De plus Savu et Tiede 2006 proposent la démarche qui suit (p. 6). Soit une copule hiérarchique composée de L niveaux, chacun d'eux est indexé par $\ell = 1, \dots, L$. Nous avons n_ℓ objets distincts, indexés par $j = 1, \dots, n_\ell$. Chacune des variables aléatoires u_1, \dots, u_d est située au niveau inférieur $\ell = 0$. Au niveau $\ell = 1$ les u_1, \dots, u_d sont regroupées en n_1 copules archimédiennes ordinaires C_{1j} , $j = 1, \dots, n_1$. La copule est de la forme suivante :

$$C_{1j}(\mathbf{u}_{1,j}) = \phi_{1j}^{-1} \left(\sum_{\mathbf{u}_{1j}} \phi_{1j}(\mathbf{u}_{1j}) \right).$$

ϕ_{1j} est le générateur de la copule C_{1j} . \mathbf{u}_{1j} représente l'ensemble des éléments de u_1, \dots, u_d qui appartient à la copule archimédienne C_{1j} , $j = 1, \dots, n_1$.

Les copules $C_{1,1}, \dots, C_{1,n_1}$ peuvent être issues de différentes familles de copules archimédiennes. Chaque copule du niveau $\ell = 1$ est ensuite agrégée au niveau $\ell = 2$. Les copules du niveau $\ell = 2$ sont composées des copules du niveau précédent (comme éléments) et peuvent être représentées par la fonction :

$$C_{2j}(C_{2j}) = \phi_{2j}^{-1} \left(\sum_{C_{2j}} \phi_{2j}(C_{2j}) \right),$$

ϕ_{2j} est le générateur de la copule C_{2j} . C_{2j} représente l'ensemble des éléments qui proviennent du niveau $\ell = 1$. Nous continuons de cette façon jusqu'à ce que le niveau L soit atteint, alors au niveau L il y a qu'une seule copule.

Afin d'avoir une hiérarchie, certaines conditions qui doivent être respectées. En autres :

1. À chaque niveau le nombre de copules doit décroître, c'est-à-dire $n_\ell < n_{\ell-1}$ pour tout $\ell = 2, \dots, L$,
2. Le dernier niveau contient qu'un seul objet, noté $C_{L,1}$,

3. À chaque niveau, la somme des dimensions de chaque copule doit correspondre à d , la dimension de la copule hiérarchique. Au niveau L on doit obtenir la dimension $d_{L,1} = d$.

Mesurer la densité À cause de la structure complexe des copules hiérarchiques il est nécessaire d'utiliser une approche récursive afin de déterminer sa densité. Rappelons qu'au niveau supérieur il n'y a qu'une seule copule notée $C_{L,1}$. La densité de la fonction copule est donnée par la dérivée partielle de la fonction $C_{L,1}$:

$$c_{L,1} = \frac{\partial^d C_{L,1}}{\partial u_1, \dots, \partial u_d}. \quad (1.34)$$

Pour établir les équations d'une copule hiérarchique, la règle de dérivation en chaîne est appliquée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^d C_{L,1}}{\partial u_1, \dots, \partial u_d} &= \sum \frac{\partial^{d-i} C_{L,1}}{\partial C_{L-1,1}^{k_1} \dots \partial C_{L-1,n_{L-1}}^{k_{L-1}}} \\ &\times \prod_{r=1}^{n_{L-1}} \sum_{u=\{k_1, \dots, k_r\}} \frac{\partial^{k_1} C_{L-1,r}}{\partial v_1} \dots \frac{\partial^{k_r} C_{L-1,r}}{\partial v_r}. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Si nous avons une hiérarchie telle que présentée par la Figure 1.4 et la copule C représentée par l'équation 1.32. La fonction de densité pour la copule hiérarchique selon les travaux de Savu et Trede $C_{21}(u_1, u_2, u_3, u_4)^2$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 C_{21}}{\partial u_1 \partial u_2 \partial u_3 \partial u_4} &= \frac{\partial^4 C_{21}}{\partial C_{11}^2 \partial C_{12}^2} \cdot \frac{\partial C_{11}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial C_{11}}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial C_{12}}{\partial u_3} \cdot \frac{\partial C_{12}}{\partial u_4} \\ &+ \frac{\partial^3 C_{21}}{\partial C_{11}^2 \partial C_{12}} \cdot \frac{\partial C_{11}}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial C_{11}}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial^2 C_{12}}{\partial u_3 \partial u_4} \\ &+ \frac{\partial^3 C_{21}}{\partial C_{11} \partial C_{12}^2} \cdot \frac{\partial^2 C_{11}}{\partial u_1 \partial u_2} \cdot \frac{\partial C_{12}}{\partial u_3} \cdot \frac{\partial C_{12}}{\partial u_4} \\ &+ \frac{\partial^2 C_{21}}{\partial C_{11} \partial C_{12}} \cdot \frac{\partial^2 C_{11}}{\partial u_1 \partial u_2} \cdot \frac{\partial^2 C_{12}}{\partial u_3 \partial u_4}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Afin de générer une copule archimédienne hiérarchique $C(u_1, \dots, u_4)$, nous devons générer des d -tuples d'observations selon des lois uniformes $U(0, 1)$. La distribution jointe est

²Savu, Cornelia, Mark Trede. 2006. «Hierarchical Archimedean Copulas. », *Institute of Econometrics, University of Münster January 2006*. p. 10.

la copule $C(u_1, u_2, u_3, u_4)$. La distribution conditionnelle de U_k étant donné les valeurs de U_1, \dots, U_{k-1} est donné par l'équation :

$$\begin{aligned} C_k(u_k | u_1, u_2, \dots, u_{k-1}) &= P(U_k \leq u_k | U_1 = u_1, \dots, U_{k-1} = u_{k-1}) \\ &= \frac{\partial^{k-1} C_k(u_1, \dots, u_k)}{\partial u_1 \cdots \partial u_{k-1}} \bigg/ \frac{\partial^{k-1} C_{k-1}(u_1, \dots, u_{k-1})}{\partial u_1 \cdots \partial u_{k-1}}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Afin que la copule hiérarchique, de dimensions d , soit correctement définie, les paramètres θ doivent remplir la condition suivante : $\theta_{\ell+1,i} < \theta_{\ell,i}$ pour tout $\ell = 1, \dots, L$, $j = 1, \dots, n_\ell$ et $i = 1, \dots, n_{\ell+1}$ de sorte $C_{\ell,j} \in C_{\ell+1,i}$ où $\theta_{\ell,j}$ est le paramètre appartenant au générateur $\varphi_{\ell,j}$.

Pour $k = 2, 3, 4$, l'algorithme de simulation suivant est appliqué :

1. Générer 4 variables $U(0,1)$ indépendantes, v_1, v_2, v_3 et v_4 ,
2. Poser $u_1 = v_1$,
3. pour $k = 2, 3, 4$ évaluer l'inverse de la fonction distribution conditionnelle :

$$u_k = C_k^{-1}(v_k | u_1, \dots, u_{k-1}).$$

Afin d'inverser la fonction des méthodes numériques devront être utilisées.

1.3.3 Exemple avec une copule archimédienne de Clayton

Pour la copule de Clayton l'équation 1.32 peut être réécrite de la façon suivante :

$$\begin{aligned} C_{21}(u_1, \dots, u_4) &= \varphi_{21}^{-1}(\varphi_{21}(C_{11}) + \varphi_{21}(C_{12})) \\ &= \varphi_{21}^{-1}(C_{11}^{-\theta_{21}} + C_{12}^{-\theta_{21}} - 2) \\ &= (C_{11}^{-\theta_{21}} + C_{12}^{-\theta_{21}} - 1)^{-1/\theta_{21}}, \end{aligned}$$

avec

$$C_{11} = (u_1^{-\theta_{11}} + u_2^{-\theta_{11}} - 1)^{-1/\theta_{11}}$$

et

$$C_{12} = \left(u_3^{-\theta_{12}} + u_4^{-\theta_{12}} - 1 \right)^{-1/\theta_{12}}.$$

Pour la copule de Clayton, l'équation 1.33 s'écrit :

$$\begin{aligned} C(u_1, \dots, u_4) &= \left\{ \left[\left(u_1^{-\theta_{11}} + u_2^{-\theta_{11}} - 1 \right)^{-1/\theta_{11}} \right]^{-\theta_{21}} \right. \\ &\quad \left. + \left[\left(u_3^{-\theta_{12}} + u_4^{-\theta_{12}} - 1 \right)^{-1/\theta_{12}} \right]^{-\theta_{21}} - 1 \right\}^{-1/\theta_{21}} \\ &= \left\{ \left(u_1^{-\theta_{11}} + u_2^{-\theta_{11}} - 1 \right)^{\theta_{21}/\theta_{11}} \right. \\ &\quad \left. + \left(u_3^{-\theta_{12}} + u_4^{-\theta_{12}} - 1 \right)^{\theta_{21}/\theta_{12}} - 1 \right\}^{-1/\theta_{21}}. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Pour trouver la fonction de densité de la copule hiérarchique de Clayton nous appliquons la décomposition 1.36 et nous trouvons :

1. Calcul de $\frac{\partial^2 C_{21}}{\partial C_{11} \partial C_{12}}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial C_{12}} \left(\frac{\partial C_{21}}{\partial C_{11}} \right) &= \frac{\partial}{\partial C_{12}} \left(-\frac{1}{\theta_{21}} \left(C_{11}^{-\theta_{21}} + C_{12}^{-\theta_{21}} - 1 \right)^{-1/\theta_{21}-1} \times \right. \\ &\quad \left. \left(-\theta_{21} C_{11}^{-\theta_{21}-1} \right) \right) \\ &= \left(\frac{1}{\theta_{21}} \right) \left(\frac{1}{\theta_{21}} + 1 \right) \left(C_{11}^{-\theta_{21}} + C_{12}^{-\theta_{21}} - 1 \right)^{-1/\theta_{21}-2} \times \\ &\quad \theta_{21}^2 (C_{11} C_{12})^{-\theta_{21}-1} \\ &= (1 + \theta_{21}) \left(C_{11}^{-\theta_{21}} + C_{12}^{-\theta_{21}} - 1 \right)^{-1/\theta_{21}-2} (C_{11} C_{12})^{-\theta_{21}-1}, \end{aligned}$$

2. Calcul de $\frac{\partial^3 C_{21}}{\partial C_{11}^2 \partial C_{12}}$:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial C_{11}} \left((1 + \theta_{21}) \left(C_{11}^{-\theta_{21}} + C_{12}^{-\theta_{21}} - 1 \right)^{-1/\theta_{21}-2} (C_{11} C_{12})^{-\theta_{21}-1} \right) \\ &= \left(-\frac{1}{\theta_{21}} - 2 \right) (1 + \theta_{21}) \left(C_{11}^{-\theta_{21}} + C_{12}^{-\theta_{21}} - 1 \right)^{-1/\theta_{21}-3} \times \\ &\quad (-\theta_{21}) C_{11}^{-\theta_{21}-1} (C_{11} C_{12})^{-\theta_{21}-1} + (1 + \theta_{21}) \times \\ &\quad \left(C_{11}^{-\theta_{21}} + C_{12}^{-\theta_{21}} - 1 \right)^{-1/\theta_{21}-2} (-\theta_{21} - 1) C_{11}^{-\theta_{21}-2} C_{12}^{-\theta_{21}-1} \\ &= (1 + 3\theta_{21} + 2\theta_{21}^2) \left(C_{11}^{-\theta_{21}} + C_{12}^{-\theta_{21}} - 1 \right)^{-1/\theta_{21}-3} C_{11}^{-2(\theta_{21}-1)} \cdot C_{12}^{-\theta_{21}-1} \\ &\quad - (1 - \theta_{21}^2) \left(C_{11}^{-\theta_{21}} + C_{12}^{-\theta_{21}} - 1 \right)^{-1/\theta_{21}-2} \cdot C_{11}^{-\theta_{21}-2} \cdot C_{12}^{-\theta_{21}-1}, \end{aligned}$$

3. Calcul de $\frac{\partial^3 C_{21}}{\partial C_{11} \partial C_{12}^2}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial C_{12}} \left((1 + \theta_{21}) \left(C_{11}^{-\theta_{21}} + C_{12}^{-\theta_{21}} - 1 \right)^{-1/\theta_{21}-2} (C_{11} C_{12})^{-\theta_{21}-1} \right) \\
&= \left(-\frac{1}{\theta_{21}} - 2 \right) (1 + \theta_{21}) \left(C_{11}^{-\theta_{21}} + C_{12}^{-\theta_{21}} - 1 \right)^{-1/\theta_{21}-3} \times \\
& \quad (-\theta_{21}) C_{12}^{-\theta_{21}-1} (C_{11} C_{12})^{-\theta_{21}-1} \\
& \quad + (1 + \theta_{21}) \left(C_{11}^{-\theta_{21}} + C_{12}^{-\theta_{21}} - 1 \right)^{-1/\theta_{21}-2} (-\theta_{21} - 1) C_{11}^{-\theta_{21}-1} \cdot C_{12}^{-\theta_{21}-2} \\
&= (1 + 3\theta_{21} + 2\theta_{21}^2) \left(C_{11}^{-\theta_{21}} + C_{12}^{-\theta_{21}} - 1 \right)^{-1/\theta_{21}-3} \cdot C_{11}^{-\theta_{21}-1} \cdot C_{12}^{-2(\theta_{21}-1)} \\
& \quad - (1 + \theta_{21})^2 \left(C_{11}^{-\theta_{21}} + C_{12}^{-\theta_{21}} - 1 \right)^{-1/\theta_{21}-2} \cdot C_{11}^{-\theta_{21}-1} \cdot C_{12}^{-\theta_{21}-2},
\end{aligned}$$

4. Calcul de $\frac{\partial^4 C_{21}}{\partial C_{11}^2 \partial C_{12}^2}$:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^4 C_{21}}{\partial C_{11}^2 \partial C_{12}^2} \\
&= \left(-\frac{1}{\theta_{21}} - 3 \right) (1 + \theta_{21})(1 + \theta_{21}) \left(C_{11}^{-\theta_{21}} + C_{12}^{-\theta_{21}} - 1 \right)^{-1/\theta_{21}-4} \\
& \quad \times (-\theta_{21}) C_{12}^{-\theta_{21}-1} C_{11}^{-2\theta_{21}-2} \cdot C_{12}^{-\theta_{21}-1} \\
& \quad + (1 + 2\theta_{21})(1 + \theta_{21}) \left(C_{11}^{-\theta_{21}} + C_{12}^{-\theta_{21}} - 1 \right)^{-1/\theta_{21}-3} C_{11}^{-2\theta_{21}-2} \\
& \quad \times (\theta_{21} - 1) C_{12}^{-\theta_{21}-2} \\
& \quad - \left[(1 + \theta_{21})^2 \left(-\frac{1}{\theta_{21}} - 2 \right) \left(C_{11}^{-\theta_{21}} + C_{12}^{-\theta_{21}} - 1 \right)^{-1/\theta_{21}-3} \right. \\
& \quad \times (-\theta_{21}) C_{12}^{-\theta_{21}-1} C_{11}^{-\theta_{21}-2} \cdot C_{12}^{-\theta_{21}-1} \\
& \quad \left. + (1 + \theta_{21})^2 \left(C_{11}^{-\theta_{21}} + C_{12}^{-\theta_{21}} - 1 \right)^{-1/\theta_{21}-2} C_{11}^{-\theta_{21}-2} (-\theta_{21} - 1) C_{12}^{-\theta_{21}-2} \right] \\
&= (1 + 3\theta_{21})(1 + 2\theta_{21})(1 + \theta_{21}) \left(C_{11}^{-\theta_{21}} + C_{12}^{-\theta_{21}} - 1 \right)^{-1/\theta_{21}-4} \\
& \quad \times (C_{11} C_{12})^{-2\theta_{21}-2} \\
& \quad - (1 + 2\theta_{21})(1 + \theta_{21})^2 \left(C_{11}^{-\theta_{21}} + C_{12}^{-\theta_{21}} - 1 \right)^{-1/\theta_{21}-3} \cdot C_{11}^{-2\theta_{21}-2} \cdot C_{12}^{-\theta_{21}-2} \\
& \quad - (1 + \theta_{21})^2 (1 + 2\theta_{21}) \left(C_{11}^{-\theta_{21}} + C_{12}^{-\theta_{21}} - 1 \right)^{-1/\theta_{21}-3} \cdot C_{11}^{-\theta_{21}-2} \cdot C_{12}^{-2\theta_{21}-2} \\
& \quad + (1 + \theta_{21})^3 \left(C_{11}^{-\theta_{21}} + C_{12}^{-\theta_{21}} - 1 \right)^{-1/\theta_{21}-2} \cdot (C_{11} C_{12})^{-\theta_{21}-2}.
\end{aligned}$$

1.4 Générateur hiérarchique

Une copule archimédienne hiérarchique peut aussi être définie par l'équation suivante³ :

$$C(u_{11}, \dots, u_{1s_1}, u_{d1}, \dots, u_{ds_d}) = \varphi_0^{-1} \left[\sum_{i=1}^d \varphi_0 \circ \varphi_0^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^{s_j} \varphi_i(u_{ij}) \right\} \right], \quad (1.39)$$

φ_0 est le générateur de la copule archimédienne de dimension d avec son générateur inverse : φ_0^{-1} . φ_0^{-1} est complètement monotone. De plus, le générateur de la copule archimédienne $\varphi_0 \circ \varphi_0^{-1}$ a ses dérivées complètement monotones.

De Feller (1971) il s'en suit que pour tout $v > 0$ fixe, que

$$\psi_{i,v}^{-1}(t) = e^{-v\varphi_0 \circ \varphi_i^{-1}(t)}, \quad t \geq 0$$

est une transformée de Laplace.

1.4.1 Distribution de Kendall

Nous recherchons la loi jointe de $T_i = \varphi_i^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^{s_i} \varphi_i(U_{ij}) \right\}$, $i = 1, \dots, d$. La distribution de T_i est aussi connue comme étant la distribution de Kendall.

Posons $G_d(t) = \sum_{j=0}^{d-1} e^{-t} \frac{t^j}{j!}$ la fonction de survie d'une variable de loi Gamma($d,1$).

³Working-paper : On Hierarchical Copulas, P. Bouvier et B. Rémillard.

H est la fonction de distribution de $\{T_1, \dots, T_d\}$. Alors :

$$\begin{aligned}
H(t) &= H(t_1, \dots, t_d) = P(T_1 \leq t_1, \dots, T_d \leq t_d) \\
&= \mathbb{P} \left\{ \sum_{j=1}^{d_j} \varphi_i(U_{ij}) \geq \varphi_i(t_i), i = 1, \dots, d \right\} \\
&= \mathbb{P} \left[\sum_{j=1}^{d_j} \varphi_i \circ \varphi_0^{-1} \{ -\log(X_{ij})/V_0 \} \geq \varphi_i(t_i), i = 1, \dots, d \right] \\
&= \mathbb{P} \left\{ \sum_{j=1}^{d_j} \psi_{i, V_0}(X_{ij}) \geq \varphi_i(t_i), i = 1, \dots, d \right\} \\
&= \mathbb{P} \left\{ -\sum_{j=1}^{d_j} \log(W_{ij}) \geq V_i \varphi_i(t_i), i = 1, \dots, d \right\} \\
&= \mathbb{E} \left[\prod_{i=1}^d G_{s_i} \{ V_i \varphi_i(t_i) \} \right].
\end{aligned}$$

Pour $k \geq 0$ et $i = 1, \dots, d$, nous posons :

$$f_{i,k,v}(t_i) = (-1)^k \frac{d^k \psi_{i,v}^{-1}(s)}{s^k} \Big|_{s=\varphi_i(t_i)} = E \left\{ e^{-V_i \varphi_i(t_i)} V_i^k \mid V_0 = v \right\}. \quad (1.40)$$

Alors $f_{i,0,v}(t_i) = e^{-v\varphi_0(t_i)}$ et $f_{i,k,v}(t_i) = -f'_{i,k-1,v}(t_i)/\varphi'_i(t_i)$,

pour $k \geq 1$ et $i = 1, \dots, d$.

De plus, pour tout $i = 1, \dots, d$,

$$\mathbb{E} [G_{s_i} \{ V_i \varphi_i(t_i) \} | V_0 = v] = \sum_{j=0}^{s_i} f_{i,j,v}(t_i) \frac{\{\varphi_i(t_i)\}^j}{j!}. \quad (1.41)$$

Notons que

$$\begin{aligned}
f_{i,j,v}(t_i) &= e^{-v\varphi_0(t_i)} \sum_{k=1}^j v^k g_{i,j,k}(t_i), \text{ avec} \\
g_{i,j+1,j+1}(t_i) &= g_{i,j,j}(t_i) \frac{\varphi'_0(t_i)}{\varphi'_i(t_i)}, \\
g_{i,j+1,1} &= -\frac{g'_{i,j,1}(t_i)}{\varphi'_i(t_i)} \text{ et} \\
g_{i,j+1,k}(t_i) &= g_{i,j,k-1}(t_i) \frac{\varphi'_0(t_i)}{\varphi'_i(t_i)} - \frac{g'_{i,j,k}(t_i)}{\varphi'_i(t_i)},
\end{aligned}$$

pour $2 \leq k \leq j$.

Notons de plus que $f_{i,1,v}(t_i) = v \frac{\varphi_0'(t_i)}{\varphi_i'(t_i)}$, ainsi $g_{i,j,k}(t_i) = \left\{ \frac{\varphi_0'(t_i)}{\varphi_i'(t_i)} \right\}^j$. Alors,

$$E [G_{s_i} \{V_i \varphi_i(t_i)\} | V_0 = v] = e^{-v\varphi_0(t_i)} \left[1 + \sum_{k=1}^{s_i} v^k \sum_{j=k}^{s_i} g_{i,j,k}(t_i) \frac{\{\varphi_i(t_i)\}^j}{j!} \right].$$

En posant $f_k(u) = (-1)^k \frac{d^k \varphi_0^{-1}(s)}{s^k} \Big|_{s=\varphi_0(u)}$. On obtient $f_0(u) = u$ et $f_{k+1}(u) = -f_k'(u)/\varphi_0'(u)$, pour $k \geq 0$. Il découle que $f_k(u) = E \{e^{-V_0 \varphi_0(u)} V_0^k\}$. Finalement, nous pouvons écrire :

$$\prod_{i=1}^d E [G_{s_i} \{V_i \varphi_i(t_i)\} | V_0 = v] = e^{-v \sum_{i=1}^d \varphi_0(t_i)} \sum_{j=0}^{s_1 + \dots + s_d} v^j B_j(t).$$

Il s'en suit que

$$H(t) = \sum_{j=0}^{s_1 + \dots + s_d} B_j(t) f_j \{C_0(t)\},$$

où

$$C_0(t) = \varphi_0^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^d \varphi_0(t_i) \right\}.$$

Par exemple, si $s_i = 2$ pour tout $i = 1, \dots, d$, alors

$$H(t) = \sum_{A \subset \{1, \dots, d\}} \prod_{i \in A} \left\{ \frac{\varphi_i(t_i) \varphi_0'(t_i)}{\varphi_i'(t_i)} \right\} f_{|A|} \{C_0(t)\}.$$

En posant $\partial_A C_0(t)$ les dérivées partielles de C_0 par rapport à tous les t_i avec $i \in A$, nous obtenons

$$H(t) = \sum_{A \subset \{1, \dots, d\}} \prod_{i \in A} \left\{ \frac{\varphi_i(t_i)}{\varphi_i'(t_i)} \right\} \partial_A C_0(t).$$

En fixant $t_j = 1$ pour tous les $j \neq i$ on obtient :

$$K_i(t_i) = P(T_i \leq t_i) = t_i + \sum_{j=1}^{s_i} \frac{\{\varphi_i(t_i)\}^j}{j!} \sum_{k=1}^j f_k(t_i) g_{i,j,k}(t_i).$$

Maintenant,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^j f_k(t_i) g_{i,j,k}(t_i) &= \mathbb{E} \left\{ e^{-V_0 \varphi_0(t_i)} \sum_{k=1}^j V_0^k g_{i,j,k}(t_i) \right\} \\ &= \mathbb{E} \{f_{i,j,V_0}(t_i)\} \\ &= \mathbb{E} \left\{ V_i^k e^{-V_i \varphi_i(t_i)} \right\}. \end{aligned}$$

Afin de connaître la distribution de V_i il suffit de calculer sa transformée de Laplace. Alors pour $s > 0$,

$$\mathbb{E}(e^{-sV_i}) = \mathbb{E}(e^{-sV_i} | V_0) = \mathbb{E}\left\{e^{-V_0 \varphi_0 \circ \varphi_i^{-1}(s)}\right\} = \varphi_i^{-1}(s). \quad (1.42)$$

Ainsi,

$$f_{i,k}(t_i) = E\left\{V_i^k e^{-V_i \varphi_i(t_i)}\right\} = (-1)^k \frac{d^k \varphi_i^{-1}(s)}{s^k} \Big|_{s=\varphi_i(t_i)},$$

nous retrouvons ainsi la formule de Barbe et al (4), c'est-à-dire :

$$K_i(t_i) = t_i + \sum_{j=1}^{s_i} f_{i,j}(t_i) \frac{\{\varphi_i(t_i)\}^j}{j!}.$$

D'une façon plus générale, la transformée de Laplace conjointe de V_1, \dots, V_d nous est fournie par :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(e^{-\sum_{i=1}^d t_i V_i}\right) &= \mathbb{E}\left(e^{-\sum_{i=1}^d t_i V_i} | V_0\right) \\ &= \mathbb{E}\left\{e^{-V_0 \sum_{i=1}^d \varphi_0 \circ \varphi_i^{-1}(t_i)}\right\} \\ &= C_0 \left\{\varphi_1^{-1}(t_1), \dots, \varphi_d^{-1}(t_d)\right\}. \end{aligned}$$

Famille de Clayton

Dans ce cas, $\varphi_0(u) = u^{-\theta_0} - 1$, tel que $f_k(u) = \frac{1}{\theta_0} \left\{ \prod_{j=1}^{k-1} (j + 2/\theta_0) \right\} u^{2+k\theta_0}$, pour $k > 0$.

1.4.2 Simulations

$$\psi_s^{-1}(t) = e^{-v \varphi_0 \circ \varphi_s^{-1}(t)}.$$

Le générateur :

$$\psi_s(u) = \varphi_s \circ \varphi_0^{-1} \left(-\frac{\log(u)}{v} \right),$$

avec $\psi_s(1) = 0$.

$$\begin{aligned}
U_{s\ell} &= \varphi_0^{-1} \left(-\frac{\log(X_{s\ell})}{V_0} \right), \\
\mathbb{P}(U_{s\ell} \leq u_{s\ell}) &= \mathbb{P} \left(-\frac{\log(X_{s\ell})}{V_0} \leq \varphi_0(u_{s\ell}) \right) \\
&= \mathbb{P}(\log(X_{s\ell}) \geq V_0 \varphi_0(u_{s\ell})) \\
&= \mathbb{P} \left(X_{s\ell} \leq e^{-V_0 \varphi_0(u_{s\ell})} \right), \quad \ell = 1, \dots, s_d, \quad s = 1, \dots, d.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E} \left\{ \prod_{s=1}^d e^{-V_0 \varphi_0 \circ \varphi_s^{-1} \{ \varphi_s \circ \varphi_s^{-1} (-\log(e^{-V_0 \varphi_0(u_{s1})})/V_0) + \dots + \varphi_s \circ \varphi_s^{-1} (-\log(e^{-V_0 \varphi_0(u_{sd})})/V_0) \}} \right\} \\
&= \mathbb{E} \left\{ \prod_{s=1}^d e^{-V_0 \varphi_0 \circ \varphi_s^{-1} \{ \varphi_s(u_{s1}) + \dots + \varphi_s(u_{sd_s}) \}} \right\} \\
&= \varphi_0^{-1} \left[\sum_1^d \varphi_0 \circ \varphi_s^{-1} \left\{ \sum_{\ell=1}^{d_s} \varphi_s(u_{s\ell}) \right\} \right].
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$C_s(u_{s1}, \dots, u_{sd}; v) = e^{-v \varphi_0 \circ \varphi_s^{-1} \left[\sum_1^d \varphi_s \circ \varphi_0^{-1} \{ -\log(u_{s\ell}/v) \} \right]},$$

$$L(t) = \mathbb{E}(e^{-tv}) = e^{-V \circ \psi^{-1}(t)},$$

$$L'(t) = -\mathbb{E}(tve^{-tv}),$$

$$-tL'(t) = -\mathbb{E}(tve^{-tv}),$$

$$L(t) - tL'(t) = \mathbb{E}((1 + Vt)e^{-tV}).$$

$$e^{-v \varphi_0 \circ \varphi_s^{-1}(t)} = u$$

$$= \psi_s^{-1}(t),$$

$$\psi_s(u) = \varphi_s \circ \varphi_0^{-1} \left(-\frac{\log(u)}{v} \right),$$

$$U_{s\ell} = \varphi^{-1} \left(-\frac{\log(X_{s\ell})}{V_0} \right),$$

$$\varphi(U_{s\ell}) = \psi_s(X_{s\ell}),$$

$$\begin{aligned}
\psi_s^{-1} \left(\sum_{\ell=1}^{d_s} \varphi_s(U_{s\ell}) \right) &= \psi_s^{-1} \left(\sum_{\ell=1}^{d_s} \psi_s(X_{s\ell}) \right) \\
&= C_s,
\end{aligned}$$

$$e^{-V_0 \varphi_0 \circ \varphi_s^{-1} \left(\underbrace{\sum_1^{d_s} \varphi_s(U_{s\ell})}_{V_s} \right)} = e^{-V_0 \varphi_0(V_s)}.$$

$$\begin{aligned} \varphi_1(U_1) + \varphi_1(U_2) &= \left\{ \frac{-\log(W_1) - \log(W_2)}{V_1} \right\}, \\ \varphi_2(U_3) + \varphi_2(U_4) &= \left\{ \frac{-\log(W_3) - \log(W_4)}{V_2} \right\}, \\ K_1 &= \varphi_1^{-1}(\varphi_1(U_1) + \varphi_1(U_2)), \\ K_2 &= \varphi_2^{-1}(\varphi_2(U_3) + \varphi_2(U_4)), \\ K_1 &= \varphi_1^{-1} \left\{ \frac{-\log(W_1) - \log(W_2)}{V_1} \right\}, \\ K_2 &= \varphi_2^{-1} \left\{ \frac{-\log(W_3) - \log(W_4)}{V_2} \right\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(K_1 \leq t_1, K_2 \leq t_2) &= \mathbb{P}(-\log(W_1) - \log(W_2) \\ &\geq V_1 \varphi_1(t_1), -\log(W_3) - \log(W_4) \\ &\geq V_2 \varphi_2(t_2)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_1 &= \psi_1^{-1} \left(-\frac{\log(W_1)}{V_1} \right), \\ X_2 &= \psi_1^{-1} \left(-\frac{\log(W_2)}{V_1} \right), \\ X_3 &= \psi_2^{-1} \left(-\frac{\log(W_3)}{V_2} \right), \\ X_4 &= \psi_2^{-1} \left(-\frac{\log(W_4)}{V_2} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_1 &= \varphi_0^{-1} \left(-\frac{\log(X_1)}{V_0} \right), \\ U_2 &= \varphi_0^{-1} \left(-\frac{\log(X_2)}{V_0} \right), \\ U_3 &= \varphi_0^{-1} \left(-\frac{\log(X_3)}{V_0} \right), \\ U_4 &= \varphi_0^{-1} \left(-\frac{\log(X_4)}{V_0} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_1(U_1) + \varphi_1(U_2) &= \varphi_1 \circ \varphi^{-1} \left(-\frac{\log(X_1)}{V_0} \right) + \varphi_1 \circ \varphi^{-1} \left(-\frac{\log(X_2)}{V_0} \right) \\
&= \psi_1(X_1) + \psi_1(X_2), \\
\varphi_2(U_3) + \varphi_2(U_4) &= \varphi_2 \circ \varphi^{-1} \left(-\frac{\log(X_3)}{V_0} \right) + \varphi_2 \circ \varphi^{-1} \left(-\frac{\log(X_4)}{V_0} \right) \\
&= \psi_2(X_3) + \psi_2(X_4).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_1 &= \varphi_0^{-1} \left(-\frac{\log(X_1)}{V_0} \right) = \varphi_0^{-1} \left(-\frac{1}{V_0} \log \left(\psi_1^{-1} \left(-\frac{\log(W_1)}{V_1} \right) \right) \right), \\
V_2 &= \varphi_0^{-1} \left(-\frac{\log(X_2)}{V_0} \right) = \varphi_0^{-1} \left(-\frac{1}{V_0} \log \left(\psi_1^{-1} \left(-\frac{\log(W_2)}{V_1} \right) \right) \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_1 &= \varphi_0^{-1} \left(-\frac{\log(X_1)}{V_0} \right) = \varphi_0^{-1} \left(-\frac{1}{V_0} \log \left(\psi_1^{-1} \left(-\frac{\log(W_1)}{V_1} \right) \right) \right), \\
V_2 &= \varphi_0^{-1} \left(-\frac{\log(X_2)}{V_0} \right) = \varphi_0^{-1} \left(-\frac{1}{V_0} \log \left(\psi_1^{-1} \left(-\frac{\log(W_2)}{V_1} \right) \right) \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_1 &= \psi_1^{-1} (\psi_1(X_1) + \psi_1(X_2)) = C_1(X_1, X_2) \\
&= e^{-V_0 \varphi_0 \circ \varphi_1^{-1} (\varphi_1(u_1) + \varphi_1(u_2))},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_2 &= \psi_2^{-1} (\psi_2(X_3) + \psi_2(X_4)) = C_1(X_3, X_4) \\
&= e^{-V_0 \varphi_0 \circ \varphi_1^{-1} (\varphi_2(u_3) + \varphi_2(u_4))}.
\end{aligned}$$

1.4.3 Génération des variables

Rappel–Fonction Gamma

Pour $d > 0$, la fonction Gamma est définie par :

$$\Gamma(d) = \int_0^{\infty} t^{d-1} e^{-t} dt,$$

1.

$$\Gamma(d+1) = d\Gamma(d), \quad n > 0;$$

$$\Gamma(1) = 1, \text{ alors } \Gamma(2) = 1, \Gamma(3) = 2! = 2, \dots, \Gamma(n+1) = n!,$$

2.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

3.

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0 < p < 1,$$

4. La densité d'une loi Gamma(α, β) est :

$$\Gamma(\alpha, \beta), f(x) = \frac{\beta^{-\alpha} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha)}.$$

Pour $\varphi(0) = \infty$, $\varphi^{-1}\{\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_d)\}$ est une copule si et seulement si il existe une variable S telle que $\mathbb{E}(e^{-\lambda S}) = \varphi^{-1}(\lambda)$ pour tout $\lambda \geq 0$, φ^{-1} est la transformée de Laplace de S . Pour générer $U = (U_{11}, \dots, U_{1s_1}, \dots, U_{d1}, \dots, U_{ds_d}) \sim C$ tel que présenté à l'équation 1.39. Nous suivons, dans une certaine mesure, la démarche proposée par Marshall et Olkin (25). Nous générons des nombres exponentiels indépendants $E_1, \dots, E_d \sim \text{Exp}(1)$ de sorte que $\mathbb{P}(E_i > t)$, avec S , la transformée de Laplace φ^{-1} . Si $U_i = \varphi^{-1}\left[\frac{E_i}{S}\right]$, $i \leq i \leq d$, on obtient une copule $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_d) \sim C$, la variable $\mathbf{V} = C(\mathbf{U})$ est générée par $\varphi^{-1}\left[\frac{\mathbf{E}}{S}\right]$ où $\mathbf{E} \sim \Gamma(d, 1)$. Dans le cas de l'équation 1.39 :

$$C(u_{11}, \dots, u_{1s_1}, u_{d1}, \dots, u_{ds_d}) = \varphi_0^{-1} \left[\sum_{i=1}^d \varphi_0 \circ \varphi_0^{-1} \left\{ \sum_{j=1}^{s_j} \varphi_i(u_{ij}) \right\} \right]$$

1. Générer V_0 avec la transformée de Laplace φ^{-1} ,

2. À partir de $V_0 = v$, générer des V_i indépendants ayant la transformée de Laplace $\psi_{i,v}^{-1}$, $i = 1, \dots, d$, avec $(\psi_{i,v}^{-1}(t) = e^{-v\varphi_0 \circ \varphi_i^{-1}(t)})$,
3. Générer des variables de loi uniforme iid, $W_{i,j}$, $j = 1, \dots, s_i$, $i = 1, \dots, d$, poser ensuite $X_{i,j} = \psi_{i,v}^{-1} \{-\log(W_{i,j}/V_i)\}$. Puis poser $U_{i,j} = \varphi_0^{-1} \{-\log(X_{i,j})/V_0\}$.

Notons que $\psi_{i,v} = \varphi_i \circ \varphi_0^{-1} \{-\log(u)/v\}$.

Si ce n'est pas possible de générer les V_1, \dots, V_d nous avons la possibilité de générer les $X_i = (X_{i1}, \dots, X_{id})$ selon la copule $C_{i,v}$ de dimension s_i à partir du générateur $\psi_{i,v}$ et ensuite poser $U_{ij} = \varphi_0^{-1} \{-\log(X_{ij}/V_0)\}$, $j = 1, \dots, s_i$, $i = 1, \dots, d$.

1.4.4 Clayton

1. On peut prendre comme générateur $\varphi_i = t^{-\theta_i} - 1$,
2. On génère V_0 avec le générateur inverse $\varphi_0^{-1}(s) = (1 + s)^{-1/\theta_0}$, la transformée de Laplace d'une loi $\Gamma\left(\frac{1}{\theta_0}, 1\right)$,
3. On génère les V_i indépendants avec $\psi_{i,v}(u) = \varphi_i \circ \varphi_0^{-1} \left\{ -\frac{\log(u)}{v} \right\}$:

$$\begin{aligned}
 \psi_{i,v}(u) &= \varphi_i \circ \varphi_0^{-1} \left\{ -\frac{\log(u)}{v} \right\} \\
 &= \varphi_i \left\{ \left(1 - \frac{\log(u)}{v} \right)^{-1/\theta_0} \right\} \\
 &= \left(1 - \frac{\log(u)}{v} \right)^{\theta_i/\theta_0} - 1 \\
 \psi_{i,v}^{-1}(t) &= e^{v(1-(t+1)^{\theta_0/\theta_i})}.
 \end{aligned}$$

Comme nous l'avons montré à l'équation 1.42 la transformée de Laplace $\mathbb{E} \left\{ e^{-V_0 \varphi_0 \circ \varphi_i^{-1}(s)} \right\} = \varphi_i^{-1}(s)$ pour $s > 0$. Dans ce cas-ci, $\varphi_i^{-1}(s)$ est la transformée de Laplace d'une loi Gamma($1/\theta$, 1),

4. Générer ensuite des variables uniformes $W_{i,j}$ $j = 1, \dots, s_i$, $i = 1, \dots, d$ et poser $X_{i,j} = \psi_{i,v}^{-1} \left\{ -\frac{\log(W_{i,j})}{V_i} \right\}$ et ensuite poser $U_{i,j} = \varphi_0^{-1} \left\{ -\frac{\log(X_{i,j})}{V_0} \right\}$ ce qui donne :
pour $X_{i,j}$:

$$X_{i,j} = e^{v \left[1 - \left(-\frac{\log(W_{i,j})}{V_i} + 1 \right)^{\theta_v/\theta_i} \right]},$$

pour U_{ij} :

$$U_{ij} = \left(1 - \frac{\log(X_{ij})}{V_0}\right)^{-1/\theta_0},$$

$$C_s(u_1, u_2) = e^{v-v \left\{ -1 + \left\{ 1 - \frac{\log(u_1)}{v} \right\}^{\frac{\theta_s}{\theta_0}} + \left\{ 1 - \frac{\log(u_2)}{v} \right\}^{\frac{\theta_s}{\theta_0}} \right\}^{\frac{\theta_0}{\theta_s}}}.$$

1.4.5 Structure de copule hiérarchique à partir de six marchés financiers

Niveau 1

$$C_{11}(u_1, u_2) = \varphi_{11}^{-1}(\varphi_{11}(u_1) + \varphi_{11}(u_2)),$$

$$C_{12}(u_2, u_3) = \varphi_{12}^{-1}(\varphi_{12}(u_2) + \varphi_{12}(u_3)),$$

$$C_{13}(u_3, u_4) = \varphi_{13}^{-1}(\varphi_{13}(u_3) + \varphi_{13}(u_4)),$$

$$C_{14}(u_4, u_5) = \varphi_{14}^{-1}(\varphi_{14}(u_4) + \varphi_{14}(u_5)),$$

$$C_{15}(u_5, u_6) = \varphi_{15}^{-1}(\varphi_{15}(u_5) + \varphi_{15}(u_6)).$$

Niveau 2

$$C_{21}(u_1, u_2, u_3) = \varphi_{21}^{-1}(\varphi_{21}(C_{11}) + \varphi_{21}(C_{12})),$$

$$C_{22}(u_2, u_3, u_4) = \varphi_{22}^{-1}(\varphi_{22}(C_{12}) + \varphi_{22}(C_{13})),$$

$$C_{23}(u_3, u_4, u_5) = \varphi_{23}^{-1}(\varphi_{23}(C_{13}) + \varphi_{23}(C_{14})),$$

$$C_{24}(u_4, u_5, u_6) = \varphi_{24}^{-1}(\varphi_{24}(C_{14}) + \varphi_{24}(C_{15})).$$

Ou encore :

$$\begin{aligned}
 C_{21}(u_1, u_2, u_3) &= \varphi_{21}^{-1} (\varphi_{21}(\varphi_{11}^{-1} (\varphi_{11}(u_1) + \varphi_{11}(u_2))) \\
 &\quad + \varphi_{21}(\varphi_{12}^{-1} (\varphi_{12}(u_2) + \varphi_{12}(u_3)))) , \\
 C_{22}(u_2, u_3, u_4) &= \varphi_{22}^{-1} (\varphi_{22}(\varphi_{12}^{-1} (\varphi_{12}(u_2) + \varphi_{12}(u_3))) \\
 &\quad + \varphi_{22}(\varphi_{13}^{-1} (\varphi_{13}(u_3) + \varphi_{13}(u_4)))) , \\
 C_{23}(u_3, u_4, u_5) &= \varphi_{23}^{-1} (\varphi_{23}(\varphi_{13}^{-1} (\varphi_{13}(u_3) + \varphi_{13}(u_4))) \\
 &\quad + \varphi_{23}(\varphi_{14}^{-1} (\varphi_{14}(u_4) + \varphi_{14}(u_5)))) , \\
 C_{24}(u_4, u_5, u_6) &= \varphi_{24}^{-1} (\varphi_{24}(\varphi_{14}^{-1} (\varphi_{14}(u_4) + \varphi_{14}(u_5))) \\
 &\quad + \varphi_{24}(\varphi_{15}^{-1} (\varphi_{15}(u_5) + \varphi_{15}(u_6)))) .
 \end{aligned}$$

Niveau 3

$$\begin{aligned}
 C_{31}(u_1, u_2, u_3, u_4) &= \varphi_{31}^{-1} (\varphi_{31}(C_{21}) + \varphi_{31}(C_{22})) , \\
 C_{32}(u_2, u_3, u_4, u_5) &= \varphi_{32}^{-1} (\varphi_{32}(C_{22}) + \varphi_{32}(C_{23})) , \\
 C_{33}(u_3, u_4, u_5, u_6) &= \varphi_{33}^{-1} (\varphi_{33}(C_{23}) + \varphi_{33}(C_{24})) .
 \end{aligned}$$

Ou encore :

$$\begin{aligned}
C_{31}(u_1, u_2, u_3, u_4) &= \varphi_{31}^{-1} \left(\varphi_{31}(\varphi_{21}^{-1}(\varphi_{21}(\varphi_{11}^{-1}(\varphi_{11}(u_1) + \varphi_{11}(u_2))) \right. \\
&\quad \left. + \varphi_{21}(\varphi_{12}^{-1}(\varphi_{12}(u_2) + \varphi_{12}(u_3)))) \right) \\
&\quad + \varphi_{31}(\varphi_{22}^{-1}(\varphi_{22}(\varphi_{12}^{-1}(\varphi_{12}(u_2) + \varphi_{12}(u_3))) \\
&\quad \left. + \varphi_{22}(\varphi_{13}^{-1}(\varphi_{13}(u_3) + \varphi_{13}(u_4)))) \right), \\
C_{32}(u_2, u_3, u_4, u_5) &= \varphi_{32}^{-1} \left(\varphi_{32}(\varphi_{22}^{-1}(\varphi_{22}(\varphi_{12}^{-1}(\varphi_{12}(u_2) + \varphi_{12}(u_3))) \right. \\
&\quad \left. + \varphi_{22}(\varphi_{13}^{-1}(\varphi_{13}(u_3) + \varphi_{13}(u_4)))) \right) \\
&\quad + \varphi_{32}(\varphi_{23}^{-1}(\varphi_{23}(\varphi_{13}^{-1}(\varphi_{13}(u_3) + \varphi_{13}(u_4))) \\
&\quad \left. + \varphi_{23}(\varphi_{14}^{-1}(\varphi_{14}(u_4) + \varphi_{14}(u_5)))) \right), \\
C_{33}(u_3, u_4, u_5, u_6) &= \varphi_{33}^{-1} \left(\varphi_{33}(\varphi_{23}^{-1}(\varphi_{23}(\varphi_{13}^{-1}(\varphi_{13}(u_3) + \varphi_{13}(u_4))) \right. \\
&\quad \left. + \varphi_{23}(\varphi_{14}^{-1}(\varphi_{14}(u_4) + \varphi_{14}(u_5)))) \right) \\
&\quad + \varphi_{33}(\varphi_{24}^{-1}(\varphi_{24}(\varphi_{14}^{-1}(\varphi_{14}(u_4) + \varphi_{14}(u_5))) \\
&\quad \left. + \varphi_{24}(\varphi_{15}^{-1}(\varphi_{15}(u_5) + \varphi_{15}(u_6)))) \right).
\end{aligned}$$

Niveau 4

$$\begin{aligned}
C_{41}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) &= \varphi_{41}^{-1}(\varphi_{41}(C_{31}) + \varphi_{41}(C_{32})), \\
C_{42}(u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) &= \varphi_{42}^{-1}(\varphi_{42}(C_{32}) + \varphi_{42}(C_{33})).
\end{aligned}$$

Ou encore :

$$\begin{aligned}
C_{41}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) &= \varphi_{41}^{-1} (\varphi_{31}(\varphi_{31}^{-1} (\varphi_{31}(\varphi_{21}^{-1} (\varphi_{11}^{-1} (\varphi_{11}(u_1) + \varphi_{11}(u_2))) \\
&\quad + \varphi_{21}(\varphi_{12}^{-1} (\varphi_{12}(u_2) + \varphi_{12}(u_3)))))) \\
&\quad + \varphi_{31}(\varphi_{22}^{-1} (\varphi_{22}(\varphi_{12}^{-1} (\varphi_{12}(u_2) + \varphi_{12}(u_3))) \\
&\quad + \varphi_{22}(\varphi_{13}^{-1} (\varphi_{13}(u_3) + \varphi_{13}(u_4)))))) \\
&\quad + \varphi_{31}(\varphi_{32}^{-1} (\varphi_{32}(\varphi_{22}^{-1} (\varphi_{22}(\varphi_{12}^{-1} (\varphi_{12}(u_2) + \varphi_{12}(u_3))) \\
&\quad + \varphi_{22}(\varphi_{13}^{-1} (\varphi_{13}(u_3) + \varphi_{13}(u_4)))))) \\
&\quad + \varphi_{32}(\varphi_{23}^{-1} (\varphi_{23}(\varphi_{13}^{-1} (\varphi_{13}(u_3) + \varphi_{13}(u_4))) \\
&\quad + \varphi_{23}(\varphi_{14}^{-1} (\varphi_{14}(u_4) + \varphi_{14}(u_5)))))) , \\
C_{42}(u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) &= \varphi_{42}^{-1} (\varphi_{32}(\varphi_{32}^{-1} (\varphi_{32}(\varphi_{22}^{-1} (\varphi_{22}(\varphi_{12}^{-1} (\varphi_{12}(u_2) + \varphi_{12}(u_3))) \\
&\quad + \varphi_{22}(\varphi_{13}^{-1} (\varphi_{13}(u_3) + \varphi_{13}(u_4)))))) \\
&\quad + \varphi_{32}(\varphi_{23}^{-1} (\varphi_{23}(\varphi_{13}^{-1} (\varphi_{13}(u_3) + \varphi_{13}(u_4))) \\
&\quad + \varphi_{23}(\varphi_{14}^{-1} (\varphi_{14}(u_4) + \varphi_{14}(u_5)))))) \\
&\quad + \varphi_{32}(\varphi_{33}^{-1} (\varphi_{33}(\varphi_{23}^{-1} (\varphi_{23}(\varphi_{13}^{-1} (\varphi_{13}(u_3) + \varphi_{13}(u_4))) \\
&\quad + \varphi_{23}(\varphi_{14}^{-1} (\varphi_{14}(u_4) + \varphi_{14}(u_5)))))) \\
&\quad + \varphi_{33}(\varphi_{24}^{-1} (\varphi_{24}(\varphi_{14}^{-1} (\varphi_{14}(u_4) + \varphi_{14}(u_5))) \\
&\quad + \varphi_{24}(\varphi_{15}^{-1} (\varphi_{15}(u_5) + \varphi_{15}(u_6)))))) .
\end{aligned}$$

Niveau 5

$$C_{51}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) = \varphi_{51}^{-1} (\varphi_{51}(C_{41}) + \varphi_{51}(C_{42})) .$$

Ou encore

$$\begin{aligned}
C_{51}(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) = & \varphi_{51}^{-1} (\varphi_{51}(\varphi_{41}^{-1} (\varphi_{31}(\varphi_{31}^{-1} (\varphi_{21}(\varphi_{21}^{-1} (\varphi_{11}(u_1) + \varphi_{11}(u_2))) \\
& + \varphi_{21}(\varphi_{12}^{-1} (\varphi_{12}(u_2) + \varphi_{12}(u_3)))))) \\
& + \varphi_{31}(\varphi_{22}^{-1} (\varphi_{22}(\varphi_{12}^{-1} (\varphi_{12}(u_2) + \varphi_{12}(u_3))) \\
& + \varphi_{22}(\varphi_{13}^{-1} (\varphi_{13}(u_3) + \varphi_{13}(u_4)))))) \\
& + \varphi_{31}(\varphi_{32}^{-1} (\varphi_{32}(\varphi_{22}^{-1} (\varphi_{22}(\varphi_{12}^{-1} (\varphi_{12}(u_2) + \varphi_{12}(u_3))) \\
& + \varphi_{22}(\varphi_{13}^{-1} (\varphi_{13}(u_3) + \varphi_{13}(u_4)))))) \\
& + \varphi_{32}(\varphi_{23}^{-1} (\varphi_{23}(\varphi_{13}^{-1} (\varphi_{13}(u_3) + \varphi_{13}(u_4))) \\
& + \varphi_{23}(\varphi_{14}^{-1} (\varphi_{14}(u_4) + \varphi_{14}(u_5)))))) \\
& + \varphi_{51}(\varphi_{42}^{-1} (\varphi_{32}(\varphi_{32}^{-1} (\varphi_{32}(\varphi_{22}^{-1} (\varphi_{22}(\varphi_{12}^{-1} (\varphi_{12}(u_2) + \varphi_{12}(u_3))) \\
& + \varphi_{22}(\varphi_{13}^{-1} (\varphi_{13}(u_3) + \varphi_{13}(u_4)))))) \\
& + \varphi_{32}(\varphi_{23}^{-1} (\varphi_{23}(\varphi_{13}^{-1} (\varphi_{13}(u_3) + \varphi_{13}(u_4))) \\
& + \varphi_{23}(\varphi_{14}^{-1} (\varphi_{14}(u_4) + \varphi_{14}(u_5)))))) \\
& + \varphi_{32}(\varphi_{33}^{-1} (\varphi_{33}(\varphi_{23}^{-1} (\varphi_{23}(\varphi_{13}^{-1} (\varphi_{13}(u_3) + \varphi_{13}(u_4))) \\
& + \varphi_{23}(\varphi_{14}^{-1} (\varphi_{14}(u_4) + \varphi_{14}(u_5)))))) \\
& + \varphi_{33}(\varphi_{24}^{-1} (\varphi_{24}(\varphi_{14}^{-1} (\varphi_{14}(u_4) + \varphi_{14}(u_5))) \\
& + \varphi_{24}(\varphi_{15}^{-1} (\varphi_{15}(u_5) + \varphi_{15}(u_6)))))))).
\end{aligned}$$

Chapitre II

DÉPENDANCE

2.1 Comportement des marchés financiers

Le rendement et le risque d'un portefeuille composé d'un seul actif financier s'expliquent entièrement par les moments de la distribution des rendements périodiques de cet actif. Si par ailleurs, nous construisons un portefeuille de plus d'un actif financier, le rendement et le risque de ce portefeuille seront alors fonction de plusieurs facteurs : le rendement et le risque de chacun des titres pris individuellement (les marges), les corrélations, ou plus généralement la dépendance entre les rendements des titres choisis et finalement les poids de chacun de ces actifs dans le portefeuille.

Ainsi, pour modéliser le comportement d'un portefeuille, composé de plusieurs actifs financiers, ou mesurer son risque, il est nécessaire de comprendre le comportement de chacun des actifs du portefeuille pris individuellement ainsi que de leurs distributions conjointes.

Nous croyons que l'application des fonctions copules à la finance de marché apporte un outil additionnel à la mesure des risques et à la modélisation des portefeuilles. En effet, d'après le théorème de Sklar énoncé précédemment voir théorème (1) à la page 14. Les copules permettent d'isoler la dépendance entre deux ou plusieurs titres des comportements individuels de chacun.

Dans ce contexte, les copules sont utilisées pour nous éclairer sur la structure de dépendance entre les titres boursiers ou celles des marchés financiers. (Genest et Gendron,

La théorie des copules et ses applications en finance, Institut de Finance Mathématique de Montréal, octobre 2006).

L'étude des distributions conjointes à partir des marges et de la matrice des corrélations comportent plusieurs lacunes telles qu'identifiées par Embrechts et al 1999. Ces lacunes sont en grande partie comblées par l'utilisation des copules. Pour être en mesure de simuler adéquatement le comportement d'un portefeuille il est nécessaire de choisir le type de copules qui le reproduisent le mieux. (Bouyé et al., 2000 ; Embrechts et al., 2003 ; Cherubini et al., 2004.)

Dans les années 1940, Hoeffding (Hoeffding. W., 1940, «Masstabinvariante Korrelationstheorie».) a étudié les propriétés des distributions multivariées. En 1959, le terme copule a vu le jour grâce à Sklar (Sklar, A., 1959, «Fonction de répartition à n dimensions et leurs marges »). En 1998, les académiciens se penchent sur l'utilisation des copules en gestion des risques (Frees et al., 1997 ; Embrechts et al., 1999). Finalement, en 2004, plusieurs compagnies d'assurance et quelques institutions financières ont déjà commencé à utiliser les copules dans la gestion de leurs risques.

Si nous examinons la distribution des rendements d'un portefeuille ou de chacun de ses titres, on remarque que la distribution s'éloigne d'une distribution normale. De plus, en observant les séries temporelles des rendements on remarque aussi que ces séries affichent de l'hétéroscédasticité. D'une part, l'éloignement de la normalité nous empêche d'utiliser le coefficient de corrélation linéaire pour mesurer la relation entre deux ou plusieurs titres financiers ; d'autre part, l'hétéroscédasticité nous amène à modéliser chacune des séries temporelles à l'aide de modèles GARCH. Ces modèles tiennent compte de (a) l'aplatissement des distributions des rendements ainsi que (b) les regroupements de volatilité souvent observés dans les séries temporelles. Ce sont là deux des caractéristiques présentes dans les marchés financiers.

2.2 Les mesures de corrélation en finance de marché

Dans cette section nous mettrons en relief le fait que les comportements des marchés financiers, en général, s'éloignent de la normalité. Nous passerons aussi en revue les principaux modèles utilisés pour mesurer la dépendance dans les marchés. Entre autres, les coefficients de corrélations linéaires appliqués à la finance de marché, les corrélations de rangs, les diagrammes *chi-plot*, les diagrammes *K-plot* et finalement la théorie des copules. Afin d'atteindre cet objectif il sera nécessaire d'isoler la structure de dépendance entre deux marchés financiers de leurs fonctions marginales (leurs marges).

2.2.1 Traitement des distributions marginales

En finance des marchés, l'hypothèse de normalité des rendements est souvent utilisée. Particulièrement la construction de la frontière efficiente développée par Markowitz (1952) et l'univers Black-Scholes (1973) pour la valorisation des options en sont des exemples.

2.2.2 Visualiser la normalité

Les marchés financiers ne suivent pas de distributions gaussiennes, ils s'éloignent de la normalité. Afin de s'en convaincre il suffit d'examiner un *Q-Q plot* des rendements financiers. Pour comparer deux distributions, les graphiques des quantiles-quantiles *Q-Q plot* nous permettent de visualiser un échantillon par rapport à une distribution choisie. Les graphiques *Q-Q-plot* comparent aussi entre elles les distributions de deux échantillons.

Q-Q-Plots

Les Q-Q-Plots sont construits de la façon suivante :

1. Classer par ordre croissant les innovations des rendements de la série chronologique d'un marché,
2. Calculer ensuite la distribution empirique de ces rendements,

3. Calculer le quantile de la distribution Φ^{-1} pour chaque observation (Φ^{-1} représente l'inverse d'une normale),
4. Nous traçons ensuite un diagramme de dispersion de la manière suivante :

$$\{X_i, Y_i\} = \{\Phi_i^{-1}, z_i\}.$$

Les X_i suivent une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et les Y_i sont les rendements R_i standardisés par :

$$Y_i = \frac{(R_i - \mu_R)}{\sigma_R}.$$

Si les rendements, dans ce cas-ci, sont distribués selon une loi normale, on devrait s'attendre à ce que les points soient alignés sur la droite de pente 1.

À la figure 2.1 on voit une illustration d'un graphique pour les distributions des rendements quotidiens des marchés canadien et américain.

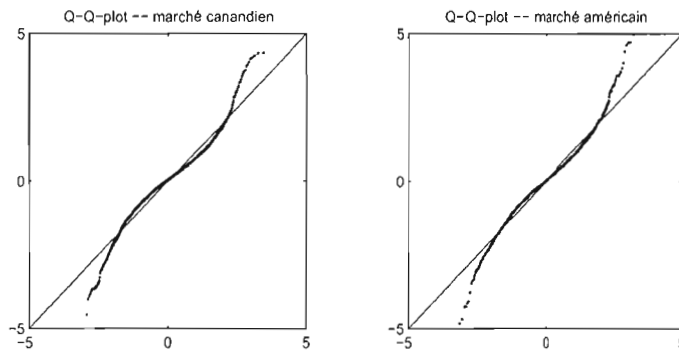


FIG. 2.1 – Q-Q-plot des marchés canadien et américain, on y observe l'éloignement de la loi normale, surtout dans les queues des distributions.

2.2.3 Modèle GARCH

Les marchés financiers sont caractérisés par des périodes de fortes volatilités et des périodes de volatilités moindres. Pendant les périodes de hautes volatilités les rendements

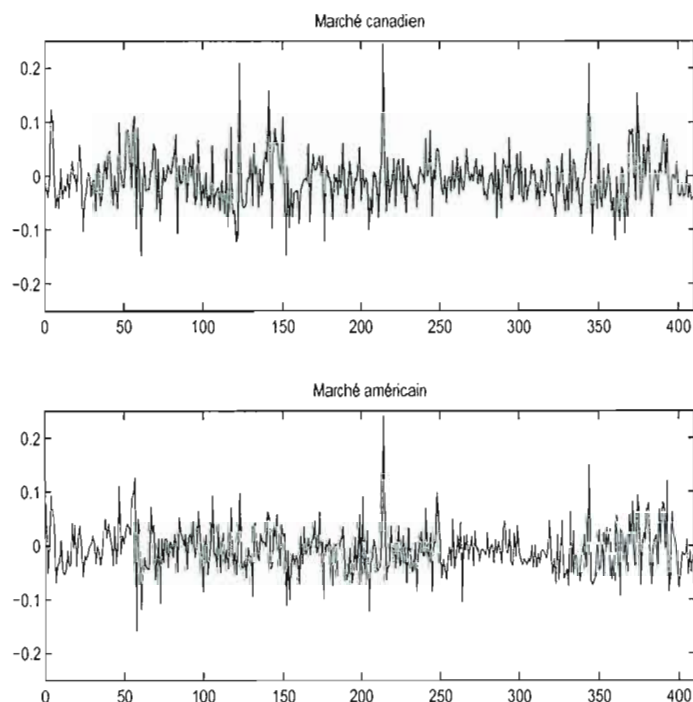


FIG. 2.2 – Le graphe du haut représente les rendements mensuels du marché canadien, alors que celui du bas, ceux du marché américain.

boursiers ont tendance à se regrouper. Ces regroupements sont plus fréquents lorsque nous observons les données quotidiennes, ils deviennent plus prononcés, par exemple lorsque nous avons affaire à des données à haute fréquence, comme les rendements intra-jour.

Il faut rappeler que les modèles GARCH sont des modèles paramétriques, en conséquence, ils fonctionnent mieux dans des conditions stables de marché. Ils captent difficilement les conditions irrégulières, tels de grandes fluctuations, par exemple, un crash suivi d'un rebond. La variance conditionnelle implique explicitement une dépendance aux observations passées.

L'un des objectifs de la modélisation de la variance est de construire une mesure pour σ_t^2 avec la propriété que les rendements standardisés (au carré) R_t^2/σ_t^2 ne comporte

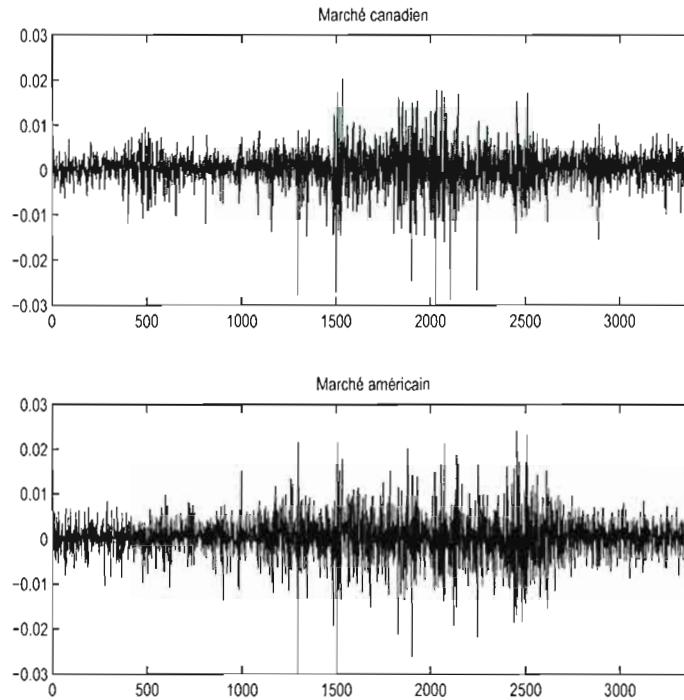


FIG. 2.3 – Le graphe du haut représente les rendements quotidiens du marché canadien, celui du bas ceux du marché américain.

pas d'autocorrélation. Habituellement l'autocorrélation se manifeste à l'intérieur de la bande de Barlett soit $\pm 2/\sqrt{T}$, alentour de zéro, 95% du temps.

Modèle de variance simple GARCH(1,1)

Dans cette section nous allons appliquer un modèle GARCH, le plus simple. Le principal inconvénient dans l'application d'un modèle GARCH est que sa mise en place requiert l'estimation de plusieurs paramètres non-linéaires. Le modèle de variance dynamique peut se formuler comme :

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha R_t^2 + \beta \sigma_t^2, \text{ avec } \alpha + \beta < 1. \quad (2.1)$$

La variance non-conditionnelle à long-terme est fixée égale à la variance de l'échantillon, σ^2 :

$$\begin{aligned}\sigma^2 &\equiv \mathbb{E}[R_{t+1}^2] = \omega + \alpha \mathbb{E}[R_t^2] + \beta \mathbb{E}[\sigma_t^2], \\ &= \omega + \alpha\sigma^2 + \beta\sigma^2, \text{ tel que} \\ \sigma^2 &= \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}.\end{aligned}$$

Le modèle de variance GARCH, implicitement repose sur la variance à long terme¹.

$$\begin{aligned}\sigma_{t+1}^2 &= (1 - \alpha - \beta)\sigma^2 + \alpha R_t^2 + \beta\sigma_t^2 \\ &= \sigma^2 + \alpha(R_t^2 - \sigma^2) + \beta(\sigma_t^2 - \sigma^2).\end{aligned}$$

La variance de demain est la moyenne pondérée de la variance à long terme, le carré du rendement d'aujourd'hui ainsi que la variance d'aujourd'hui.

TAB. 2.1 – *Estimateur Vraisemblance (MLE) des paramètres GARCH pour les distributions marginales.*

Paramètres	S&P 500	TSX
ω	0.00000013	0.00000015
α	0.05881263	0.07816192
β	0.93594296	0.91604028
Persistence	0.994775559	0.99420220

Le facteur de persistance est défini par $\alpha + \beta$. Une persistance élevée ($\alpha + \beta$) près de 1 implique qu'un choc dans le marché éloignera la variance conditionnelle de sa variance à long terme y restera longtemps avant qu'elle ne retourne vers sa moyenne.

¹Pour un traitement plus complet se référer à l'ouvrage de P. Christoffersen (9).

2.2.4 Corrélation linéaire

Le coefficient de corrélation linéaire est largement utilisé dans l'industrie de la finance de marché. Supposons deux variables aléatoires, qui pourraient représenter les rendements respectifs de deux marchés financiers, ou deux actifs boursiers notés X et Y , ce coefficient se calcule par la formule suivante :

$$\rho_{XY} = \frac{\mathbb{E}[X - \bar{X}] \mathbb{E}[Y - \bar{Y}]}{\sqrt{\text{Var}_X} \sqrt{\text{Var}_Y}} = \frac{\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

Cette mesure de dépendance comporte plusieurs défauts. En fait, elle mesure que l'association *linéaire* entre deux variables aléatoires, de plus, cette mesure dépend du choix des marges, c'est-à-dire la modélisation des comportements individuels des actifs financiers.

Aussi :

- Elle dépend du choix des fonctions marginales,
- Elle n'existe pas toujours par exemple une distribution de Cauchy,
- Elle peut être près de 0 même en dépendance forte,
- Elle est qu'une mesure d'association linéaire.

Remarque 1 *Schweizer & Wolff, 1981 (30) ont conclu qu'une mesure de dépendance appropriée dépend que de la fonction copule.*

- La connaissance du coefficient de corrélation entre deux variables aléatoires X et Y et de leurs distributions marginales ne déterminent pas la distribution conjointe,
- Il existe une panoplie de distributions autres que des distributions elliptiques, alors la connaissance du coefficient de corrélation est inutile et
- Le coefficient de corrélation linéaire fourni aucune information sur la dépendance dans les queues des distributions.

Embrechts, Paul, Alexander McNeil, Daniel Staumann, 1999², (11) ont identifié plusieurs défaillances liées à l'utilisation du coefficient de corrélation linéaire, les princi-

²«Correlation and Dependence in Risk Management Properties and Pitfalls.», *Modeling Extremal Events for Insurance and Finance*.

pales sont :

1. Les variances de X et Y doivent être finies, sinon la corrélation linéaire n'est pas définie. L'utilisation du coefficient de corrélation devient problématique lorsqu'un grand nombre d'observations sont concentrées dans les queues des distributions,
2. L'indépendance entre deux variables aléatoires implique un coefficient de corrélation ρ égal à 0. Un coefficient de corrélation linéaire ($\rho(X, Y) = 0$), en général, n'implique pas nécessairement l'indépendance,
3. Le coefficient de corrélation n'est pas invariant pour les transformations non linéaires strictement croissantes et
4. Une seule observation peut, de façon arbitraire, avoir beaucoup d'influence sur la valeur du coefficient de corrélation linéaire.

2.2.5 Corrélation de rangs

Au lieu de calculer le coefficient de corrélation linéaire entre deux variables aléatoires X et Y nous pouvons utiliser leurs rangs. Par exemple pour un échantillon aléatoire de loi H , nous prenons chacune des paires d'observations :

$$(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n),$$

ensuite nous les classons par rangs et finalement nous normalisons leurs rangs pour obtenir les paires de rangs normalisées :

$$\left(\frac{R_1}{n}, \frac{S_1}{n} \right), \dots, \left(\frac{R_n}{n}, \frac{S_n}{n} \right).$$

On peut construire une mesure d'association indépendante des marges qui ne souffre pas nombreux problèmes identifiés pour le coefficient de corrélation linéaire. On remarque de plus que chacun des rangs normalisé est uniforme sur $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1$.

Il existe deux mesures de corrélations basées sur les rangs, le tau de Kendall et le rho de Spearman.

Tau de Kendall

Le tau de Kendall est une mesure de concordance sur les rangs. La mesure d'association pour deux variables aléatoires X et Y se définit par :

$$\tau(X, Y) = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} C \{F(x), G(y)\} dH \{F(x), G(y)\} - 1,$$

où

$$\tau(X, Y) = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1. \quad (2.2)$$

La fonction copule $C(u, v)$ a été définie à la section 1.1. Le tau de Kendall, $\tau_K(X, Y)$, pour un échantillon de taille n , est estimé en calculant le coefficient :

$$\tau_K^{(n)}(X, Y) = \frac{C - D}{\binom{n}{2}},$$

C et D représentent le nombre de paires concordantes et discordantes respectivement.

Une paire d'observations est concordante si :

$$(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0,$$

et discordante lorsque :

$$(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0.$$

Une illustration de cette notion est donnée par le graphique 2.4.

Rhò de Spearman

Le rhò de Spearman est aussi une mesure d'association liée aux rangs. La mesure d'association pour deux variables aléatoires X et Y se définit par :

$$\begin{aligned} \varrho(X, Y) &= 12 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)G(y) dH(x, y) - 3, \\ \varrho(X, Y) &= 12 \int_0^1 \int_0^1 uv dC(u, v) - 3. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Le $\varrho_S(X, Y)$ pour un échantillon de taille n est estimé en calculant le coefficient de corrélation appliqué aux paires de rangs normalisés :

$$\varrho_S^{(n)} = 1 - \frac{6}{n(n^2 - 1)} \sum_{i=1}^n (R_i - S_i)^2.$$

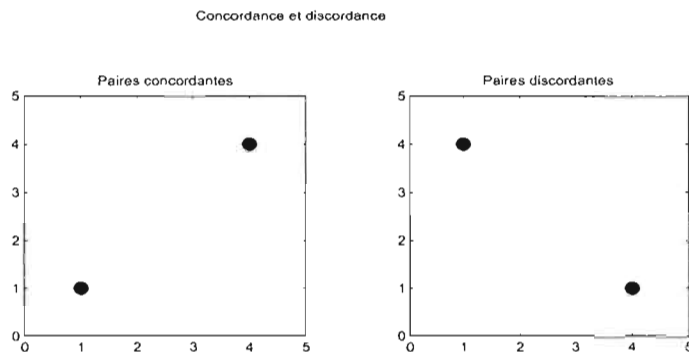


FIG. 2.4 – Le graphe de gauche représente des couples concordants, le graphe de droite des couples discordants.

2.2.6 Copules comme mesure de dépendance

Les coefficients de corrélations de Kendall et Spearman, donnés par les équations (2.2) et (2.3) respectivement, dépendent de la fonction copule uniquement, ils sont indépendants de leurs marges.

Définition 2.2.1 (Mesure de concordance) Une mesure d'association κ entre deux variables aléatoires X et Y avec une fonction copule C est une mesure de concordance si les propriétés suivantes sont satisfaites³ :

1. κ est défini pour chaque paire X, Y des variables aléatoires continues,
2. $-1 \leq \kappa(X, Y) \leq 1$, $\kappa(X, -X) = -1$ et $\kappa(X, X) = 1$,
3. $\kappa(X, Y) = \kappa(Y, X)$,
4. $\kappa(-X, Y) = \kappa(Y, -X) = -\kappa(Y, X)$,
5. Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes alors $\kappa(Y, X) = \kappa_{\Pi} = 0$, où Π est la copule d'indépendance définie par $\Pi(u, v) = uv$, $u, v \in [0, 1]^2$,
6. Si C_1 et C_2 sont des copules, telles que $C_1 \prec C_2$, alors $\kappa_{C_1} \leq \kappa_{C_2}$, $C_1 \prec C_2$ ssi $C_1(u, v) \leq C_2(u, v) \forall u, v \in I$,
7. Si $\{(X_n, Y_n)\}$ une séquence de variables aléatoires continues avec une fonction copule C_n , si $\{C_n\}$ converge, alors la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_{C_n} = \kappa_C$.

³Voir Cherubini (8) p. 96

Le tau de Kendall et le rhô de Spearman sont des mesures de concordance et elles satisfont aux propriétés de la définition (2.2.1), pour les variables aléatoires continues.

Si κ est une mesure de concordance pour deux variables aléatoires continues alors, κ possède de plus les propriétés suivantes :

1. Si Y est une fonction croissante de X alors $\kappa(X, Y) = \kappa_M = 1$ (borne maximum de Fréchet),
2. Si Y est une fonction décroissante de X alors $\kappa(X, Y) = \kappa_W = -1$ (borne minimum de Fréchet),
3. Si a et b sont des fonctions strictement croissantes sur les images de X et de Y respectivement, alors $\kappa(a(X), b(Y)) = \kappa(X, Y)$.

Un test d'indépendance entre toutes les paires de variables aléatoires doit être basé sur les rangs. Ainsi, on peut voir la nécessité de dissocier la mesure de dépendance de leurs marges.

2.2.7 Méthodes pour identifier la dépendance entre les marchés financiers

L'étude des risques de marché d'un portefeuille requiert l'échantillonnage des distributions conjointes sous différentes conditions de marché.

Afin d'illustrer la dépendance nous allons choisir comme données expérimentales les marchés des actions américaines et canadiennes. Nous voulons dans un premier temps explorer la dépendance qui unit ces deux marchés financiers. Dans cet ordre d'idées, nous prenons un échantillon de données mensuelles s'échelonnant sur plus de 30 ans pour en explorer leurs comportements conjoints.

Nous analysons les données des rendements ainsi que la fonction de dépendance établie par les rangs normalisés tel que décrit à la section (2.2.5).

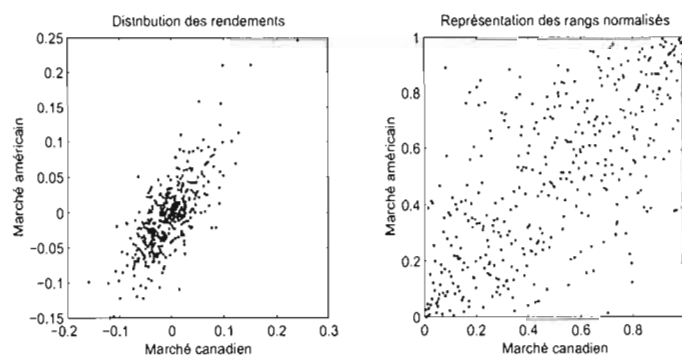


FIG. 2.5 – Rendements mensuels des marchés américain et canadien et leurs rangs normalisés.

Le graphique de gauche à la figure 2.5 on retrouve les rendements conjoints des marchés canadien et américain tels qu'observés. Les rangs normalisés sont présentés à la partie droite de la figure, nous observons une forte dépendance à la fois dans la partie supérieure et inférieure des distributions des rendements conjoints entre ces deux marchés.

2.2.8 Les représentations *Chi-Plot*

Fisher et Switzer (13) ont introduit les graphiques *Chi-Plots* utilisés en conjonction avec les diagrammes de dispersions «*scatterplots*» pour investiguer l'association potentielle entre deux variables aléatoires. La méthode est conçue de façon à ce que sous les conditions d'indépendance, les points du graphique *Chi-Plot*, soient concentrés horizontalement alentour de 0, comme l'illustre la partie de gauche de la figure 2.6.

Chaque point (X_i, Y_i) de l'échantillon aléatoire de taille n est transformé en paire (λ_i, χ_i) pour tout $(i = 1, \dots, n)$. Cette méthode produit un second diagramme de dispersions mettant en évidence la dépendance qui existe entre deux variables aléatoires.

Lorsque deux variables aléatoires sont indépendantes, la distribution conjointe s'exprime comme le produit des deux fonctions marginales. Dans ce contexte, le χ_i mesure, en quelques sortes, l'impossibilité de factoriser la fonction bivariée en un produit de leurs marges, les paires de points s'éloignent alors de l'axe horizontal. La valeur λ_i mesure la distance de chaque point (X_i, Y_i) par rapport à la médiane de la distribution bivariée. Les déviations positives ou négatives de l'indépendance correspondent aux déviations par rapport à l'axe horizontal $\chi = 0$.

Description de la méthode de FISHER ET SWITZER⁴

Le *Chi-Plot* est une mesure de dépendance basée aussi sur les rangs pour chaque paire d'observations (X_i, Y_i) , $i \in \{1, \dots, n\}$, n le nombre d'observations. On pose :

$$H_i = \frac{1}{n-1} \# \{j \neq i : X_j \leq X_i, Y_j \leq Y_i\} \quad (2.4)$$

et

$$F_i = \frac{1}{n-1} \# \{j \neq i : X_j \leq X_i\}, \quad G_i = \frac{1}{n-1} \# \{j \neq i : Y_j \leq Y_i\}. \quad (2.5)$$

où $\#$ représente la cardinalité de l'ensemble.

Sous les conditions d'indépendance on devrait s'attendre à avoir $H_i = F_i \times G_i$. Les

⁴Fisher, N.L., Switzer, P. (1985). «Chi-Plots for Assessing Dependence.» *Biometrika*, 72, 253-265.

auteurs proposent de représenter graphiquement les paires de points (λ_i, χ_i) , par :

$$\chi_i = \frac{H_i - F_i G_i}{\sqrt{F_i(1 - F_i) \times G_i(1 - G_i)}}, \quad (2.6)$$

et

$$\lambda_i = 4 \text{Sign}(\tilde{F}_i \tilde{G}_i) \max(\tilde{F}_i^2, \tilde{G}_i^2), \quad (2.7)$$

avec $\tilde{F}_i = F_i - 1/2$ et $\tilde{G}_i = G_i - 1/2$ pour $1 \leq i \leq n$, une mesure d'éloignement par rapport au centre de la distribution bivariable.

Les valeurs de χ_i :

Pour chaque point de l'échantillon, χ_i est le coefficient de corrélation entre les valeurs de X et de Y , ainsi, chaque valeur de χ_i sont dans l'intervalle $[-1, 1]$.

Les valeurs de λ_i :

Toutes les valeurs de λ_i sont aussi dans l'intervalle $[-1, 1]$. Si les données proviennent d'un échantillon où les deux variables aléatoires sont indépendantes, la distribution des valeurs de λ_i devrait être uniforme. Lorsque les variables X et Y présentent une certaine dépendance, les points ont alors tendance à former des regroupements. Si X et Y sont positivement corrélés, les λ_i auront une tendance positive, l'inverse pour une corrélation négative. Les $|\lambda_i|$ représentent la distance de chaque point (X_i, Y_i) de l'échantillon de la médiane de la distribution bivariable.

Remarque

Les valeurs χ_i et λ_i dépendent uniquement des rangs de X_i et de Y_i , ainsi la représentation graphique n'est pas influencée par les aberrations de marché.

Représentation graphique

La représentation graphique est obtenue par l'ensemble des paires (λ_i, χ_i) . À la figure 2.6 nous retrouvons un graphique Cli-Plot. La partie de gauche est tracé à partir

d'un échantillon bivarié de variables aléatoires indépendantes. La partie de droite est tracée à partir d'un échantillon de la distribution conjointe des rendements des marchés des actions américaines et canadiennes.

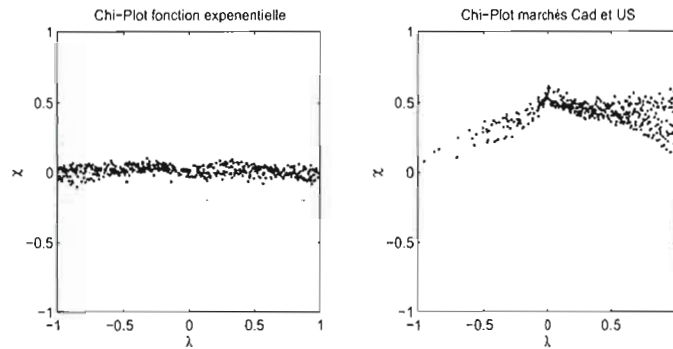


FIG. 2.6 – Diagramme Chi-Plot pour des données indépendantes et pour les rendements entre les marchés américain et canadien.

Les points au dessus de $\chi = 0$ montrent la présence de dépendance entre les deux variables aléatoires. Pour le cas d'indépendance, les points sont répartis horizontalement autour de $\chi = 0$ tel qu'illustré à la partie de gauche de la figure 2.6. De plus, ils sont à l'intérieur de la bande de confiance 95% par rapport à $\chi = 0$. La dépendance positive entre les marchés américain et canadien s'observe par le fait que l'ensemble des points sont situés au dessus de $\chi = 0$, ils sont pour la plupart à l'extérieur de la bande de confiance 95%. De plus, à $\lambda = 0$ on observe un sommet pour les valeurs de χ_i , ce sommet correspond à la corrélation de rangs entre les deux variables aléatoires. Le sommet est à environ 0.5, le τ de Kendall pour les corrélations entre les marchés canadien et américain, pour la période sous observation est de 0.513.

Pour des variables aléatoires indépendantes, les points sont répartis uniformément selon λ_i . Lorsque les variables aléatoires affichent de la dépendance, comme la partie de droite de la figure 2.6; les points se regroupent dans le quadrant I du graphique, la concentration des points est plus forte à droite de $\lambda = 0$. Fisher et Switzer notent que plus les valeurs de χ_i se rapprochent de 1, plus les valeurs de λ_i se retrouvent dans la

région $[0, 1]$, les points sont fortement concentrés lorsque $\lambda_i \rightarrow 0$ et plus éparpillés lorsque $\lambda_i \rightarrow 1$, on le voit clairement aux figures 2.7 et 2.8, les parties droites des figures, pour les cas de fortes dépendances entre deux variables aléatoires. Lorsque $\lambda = 0$ les paires de points sont concentrés au sommet du diagramme de dispersions, lorsque $\lambda \rightarrow 1$ les paires de points sont éparpillés.

Dépendance dans les queues des distributions

Fisher et Switzer ne tirent pas de conclusion par rapport à la dépendance dans les queues des distributions. On peut ajouter que si les points sont éloignés de $\lambda = 0$ cela indique qu'ils sont loin du centre de la distribution, en conséquence, ils doivent se retrouver dans les queues inférieure ou supérieure de la distribution. Il n'est pas possible, à partir du diagramme de distinguer la partie de droite ou de gauche de la distribution. Comme l'indique l'équation (2.7) si les deux variables aléatoires sont dépendantes, elles sont de même signe, en conséquence les valeurs de λ_i sont dans la région $\lambda_i \in [0, 1]$. De plus, si F_i ou G_i de l'équation (2.7) sont loin du centre de la distribution, alors en prenant la valeur maximale au carré, plus que l'observation est dans une des queues de la distribution plus la valeur de λ_i se rapproche de 1. Ainsi, la dépendance dans la queue de la distribution se manifeste pour des valeurs élevées de χ_i et proches de 1 pour les valeurs de λ_i .

Ce phénomène peut être observé à la fois aux figures 2.7 et 2.8 pour des *Chi-plot* de variables aléatoires gaussiennes et de Student. Pour un même coefficient de corrélation entre deux variables aléatoires, on voit que les points sont plus près de 1 pour la distribution de Student- t_3 comparativement à la distribution gaussienne. Lorsque les variables aléatoires sont indépendantes, ils se retrouvent répartis de façon uniformes par rapport aux valeurs de λ . Les valeurs de χ sont alentour de $\chi = 0$, comme on le voit à la figure 2.9.

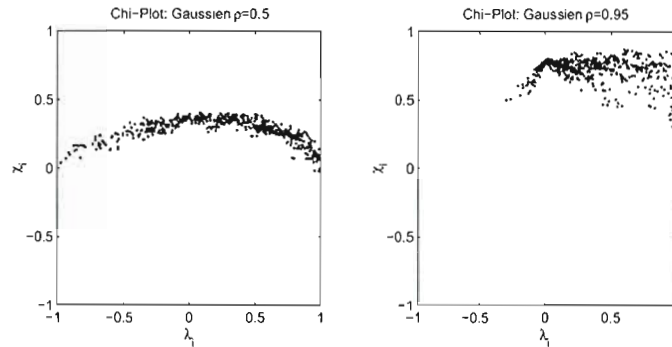


FIG. 2.7 – Chi-Plot pour des données gaussiennes avec $\rho = 0.5$ et avec $\rho = 0.95$.

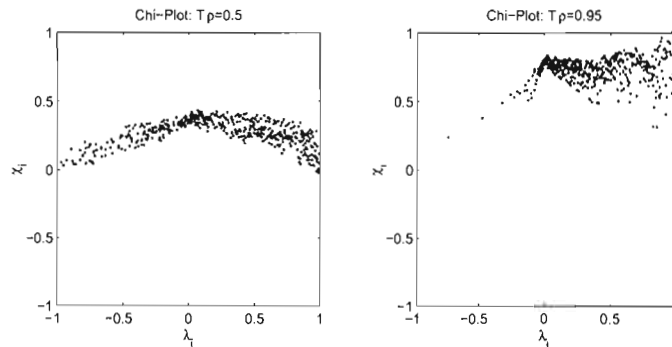


FIG. 2.8 – Chi-Plot pour des variables aléatoires selon une distribution de Student avec trois degrés de liberté pour $\rho = 0.5$ et $\rho = 0.95$.

2.2.9 Détecter la dépendance avec les diagrammes de Kendall

Les diagrammes de Kendall ou *K-Plots*, développés par Genest et Rivest 1993 (20) et par Barbe et al 1996 (4) pour le cas de distributions multidimensionnelles, sont en quelques sortes une adaptation des Q-Q plot. La technique proposée par Genest et Boies 2003 (14) conserve aussi certains aspects des Chi-plot, c'est une mesure basée sur les rangs avec des tests d'indépendance non paramétriques. L'allure du graphique d'un K-plot utilisé, pour illustrer une association, est directement liée à la copule sous-jacente. Un K-plot d'un échantillon aléatoire bivarié, $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$, est construit de la

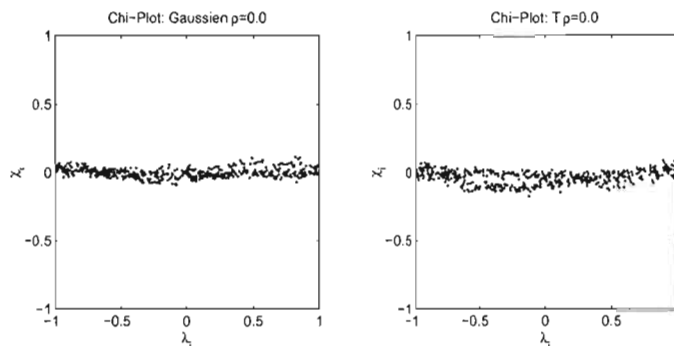


FIG. 2.9 – Chi-plot pour des variables aléatoires indépendantes une distribution bivariée gaussienne et une distribution bivariée de Student.

façon suivante :

1. Pour chaque $1 \leq i \leq n$, calculer la valeur de H_i tel que décrit à l'équation (2.4),
2. Ordonner les valeurs de H_i pour obtenir la séquence : $H_{(1)} \leq \dots \leq H_{(n)}$,
3. Porter ensuite sur un graphique les paires de points $(W_{1:n}, H_{(i)})$, $1 \leq i \leq n$. Les valeurs de $W_{(i:n)}$ représentent l'espérance des $i^{\text{ième}}$ observation de l'échantillon aléatoire de taille n sous l'hypothèse nulle d'indépendance.

Pour compléter l'exercice il suffit de déterminer la forme de K_0 sous l'hypothèse nulle d'indépendance. La densité cherchée est trouvée par l'équation suivante :

$$W_{i:n} = n \binom{n-1}{i-1} \int_0^1 w \{K_0(w)\}^{i-1} \times \{1 - K_0(w)\}^{n-i} dK_0(w), \quad (2.8)$$

$\forall 1 \leq i \leq n$. L'équation 2.8 peut aussi s'écrire de la façon suivante⁵ :

$$W_{i:n} = n \binom{n-1}{i-1} \int_0^1 w k_0(w) \{K_0(w)\}^{i-1} \times \{1 - K_0(w)\}^{n-i} dw, \quad (2.9)$$

avec :

$$\begin{aligned} K_0(w) &= \mathbb{P}(UV \leq w) = \int_0^1 \mathbb{P}\left(U \leq \frac{w}{v}\right) dv \\ &= \int_0^w 1 dv + \int_w^1 \frac{w}{v} dv = w - w \log(w), \end{aligned}$$

⁵Voir (16).

k_0 est la fonction de densité correspondante.

Propriétés de K

Genest et Boies (14) ont identifié plusieurs propriétés des K -plots en autres :

1. K est la fonction de distribution de la variable aléatoire $V = H(X, Y)$ obtenue à partir de la transformation d'intégrale de probabilité de paires aléatoires (X, Y) avec la fonction cumulative H . $K(w)$ représente la probabilité que $\{H(X, Y) \leq w\}$.
2. K dépend uniquement de la copule qui lui est associée par H , indépendante des marges F et G de la distribution conjointe de H . Rappelons que $H(x, y) = C\{F(x), G(y)\}$, alors :

$$\begin{aligned}
 K(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{I}\{H(x, y) \leq w\} dH(x, y) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{I}\{C\{F(x), G(y)\} \leq w\} dC\{F(x), G(y)\} \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{I}\{C(u, v) \leq w\} d(u, v) \\
 &= \mathbb{P}\{C(U, V) \leq w\},
 \end{aligned}$$

\mathbb{I} est une fonction indicatrice,

3. K est une fonction univariée qui capte la dépendance sous-jacente à la copule C ,
4. Vu que les paires de points de (X, Y) sont distribuées comme H , nous avons :

$$\tau(X, Y) = 4\mathbb{E}\{H(X, Y)\} - 1 = 3 - 4 \int_0^1 K(w)dw,$$

5. Les variables (X, Y) sont dites co-monotoniques lorsque $\tau(X, Y) = \pm 1$. En d'autres termes lorsque $\tau = 1$, $Y = G^{-1}\{F(X)\}$ presque sûrement, alors, $K(w) = w$, $\forall 0 \leq w \leq 1$. Si par ailleurs $\tau = -1$, alors $Y = G^{-1}\{1 - F(X)\}$ presque sûrement et $K \equiv 1$ sur son domaine.

Copule de Clayton

Si nous appliquons cette démarche à la copule expérimentale de Clayton. La fonction génératrice de la copule de Clayton est :

$$\varphi_{\theta}(v) = \frac{1}{\theta}(v^{-\theta} - 1).$$

La fonction $K_{\theta}(v)$ est alors :

$$K_{\theta}(v) = v - \frac{\varphi_{\theta}}{\varphi'_{\theta}(v)}.$$

Nous pouvons ainsi exprimer $K_{\theta}(v)$ par l'équation :

$$\begin{aligned} K_{\theta}(v) &= v - \frac{\frac{1}{\theta}(v^{-\theta} - 1)}{-v^{-\theta-1}} \\ &= v + \frac{1}{\theta}(v^{-\theta} - 1)v^{\theta+1} \\ &= v + \frac{v}{\theta}(1 - v^{\theta}), \quad 0 \leq v \leq 1. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Et la dérivée de $K_{\theta}(v)$

$$\begin{aligned} \frac{dK_{\theta}}{dv} &= 1 + \frac{1}{\theta}(1 - v^{\theta}) + \frac{v}{\theta}(-\theta v^{\theta-1}) \\ &= 1 + \frac{1}{\theta} - v^{\theta} \left(\frac{1}{\theta} - 1 \right). \end{aligned} \tag{2.11}$$

L'indépendance pour la copule de Clayton est obtenue pour une valeur de $\theta = 0$, nous obtenons alors pour $K_0(v)$ l'expression suivante :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} K_{\theta}(v) = \lim_{\theta \rightarrow 0} v + \frac{v}{\theta}(1 - v^{\theta}) = v - v \log(v).$$

En substituant les équations (2.10) et (2.11) dans (2.9) nous obtenons pour la copule de Clayton :

$$\begin{aligned} W_{i:n} &= n \binom{n-1}{i-1} \int_0^1 v \left(1 - v^{\theta} + \frac{1 - v^{\theta}}{\theta} \right) \left[v + \frac{v}{\theta}(1 - v^{\theta}) \right]^i \\ &\quad \times \left[1 - v - \frac{v}{\theta}(1 - v^{\theta}) \right]^{n-i} dv. \end{aligned}$$

Propriétés des K -plot

Genest et Boies (14) ont aussi identifié plusieurs propriétés importantes des diagrammes K -plot :

1. Pour un grand échantillon, par exemple lorsque $n \rightarrow \infty$, alors $K_n(w) = K(w)$ en probabilité pour tout $0 \leq w \leq 1$, ainsi, $K_n^{-1}(w) \rightarrow K^{-1}(w)$ en probabilité aussi pour tout $0 \leq w \leq 1$,
2. Pour tout entier arbitraire $n \geq 1$ et pour $0 \leq p \leq 1$, avec $\lceil np \rceil$, (le plus petit entier plus grand ou égal à np) :

$$H_{(\lceil np \rceil)} = K_n^{-1}(p) \rightarrow K^{-1}(p),$$

et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} (H_{(\lceil np \rceil)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} W_{\lceil np \rceil : n} = K_0^{-1}(p)$$

sous l'hypothèse nulle d'indépendance,

3. Pour un échantillon suffisamment grand de dimension n , les paires $(W_{i:n}, H_{(i)})$ auront tendance à se concentrer sur la courbe $p \mapsto (K_0^{-1}(p), K^{-1}(p))$. En d'autres mots, les points du K -plot ressembleront au graphique $w \mapsto K^{-1}(K_0(w))$,
4. Le graphique aura tendance à être linéaire lorsque $K = K_0$, sous les conditions d'hypothèse nulle,
5. Tous les points du graphique auront tendance à tomber sur l'axe horizontal $p \equiv 0$ lorsque les variables X et Y sont co-monotoniques avec $\tau(X, Y) = -1$, car alors $K^{-1}(p) = 0$ pour toutes les valeurs possibles de $0 \leq p \leq 1$,
6. Tous les points tomberont sur la courbe $K_0(p)$ lorsque X et Y sont co-monotoniques avec $\tau(X, Y) = 1$, puisque $K^{-1}(p) \equiv p$ sur $[0, 1]$.

Avantage de l'utilisation des K -plots

Les K -plot ont certains avantages sur les chi -plots à cause principalement de la nature de la fonction K :

1. La fonction K peut être facilement interprétée,
2. De plus la construction de la fonction K peut être étendue à plusieurs dimensions.

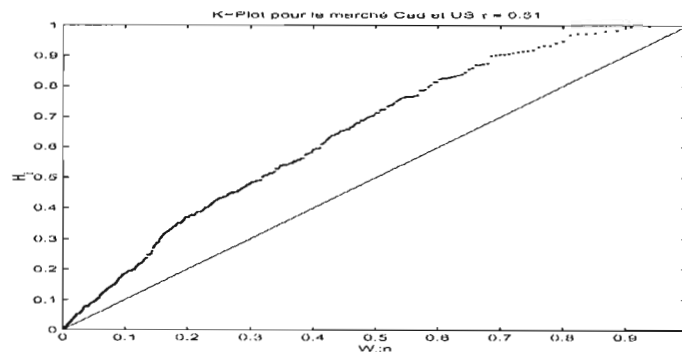


FIG. 2.10 – Le graphe représente le vecteur bivarié des rendements des marchés canadien et américain pour la copule de Clayton avec un τ de Kendall de 0.51 .

La méthodologie utilisée pour générer ces aides visuelles est exposée par Genest et Boies (14). Le *Chi-Plot* est la représentation graphique de l'éloignement de chaque paire de points (X_i, Y_i) , des variables aléatoires X et Y , observées par rapport au "centre" de l'ensemble des points.

Au graphique 2.10 nous retrouvons la représentation du graphique *K-plot* pour les données mensuelles des marchés canadien et américain.

2.2.10 Estimation des paramètres méthode de Genest-Rivest 1993, cas bivarié

La méthode proposée par Genest et Rivest (20), suggère l'utilisation d'une variable unidimensionnelle issue d'une fonction de distribution empirique. La stratégie proposée par les auteurs est de choisir un paramètre pour la copule archimédienne qui offre la meilleure représentation pour la distribution empirique conjointe : proposition 3.

Proposition 3 (Genest-Rivest 1993) *Une copule archimédienne bivariée est caractérisée par le comportement stochastique de la variable aléatoire $V = H(X, Y)$. La méthode la plus naturelle est de trouver un estimé de la fonction de distribution univariée :*

$$K(v) = \mathbb{P}[C\{F(X), G(Y)\} \leq v]$$

sur l'intervalle $(0, 1)$.

Genest et Rivest (1993) (20) ont proposé une méthode graphique pour choisir un modèle de copules archimédiennes à partir d'une comparaison visuelle. Dans leurs travaux, ils ont pris avantage du fait que la fonction a la représentation :

$$K(\theta, v) = v - \frac{\varphi_\theta(v)}{\varphi'_\theta(v)}, \quad v \in (0, 1].$$

Ils ont construit une version empirique K_n (non-paramétrique) et elle a été comparée à un estimé paramétrique de la fonction $K(\theta, v)$. Cette démarche pour construire empiriquement la fonction K est la suivante :

1. Construire une distribution empirique bivariable de la fonction de distribution $H_n(x, y)$,
2. Calculer les valeurs de $H_n(X_i, Y_i)$ pour $i = 1, \dots, n$ et utiliser ces valeurs pour construire une distribution empirique univariée de la fonction K ,
3. Poser $K(\theta, v) = \mathbb{P}\{H(\mathbf{X}) \leq v\}$, avec :

$$K_n(v) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{I}(V_{jn} \leq v), \quad v \in [1, 0]$$

et

$$V_{jn} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{I}(X_k \leq X_j, Y_k \leq Y_j),$$

le calcul se fait sur les rangs :

$$V_{jn} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{I}(R_k \leq R_j, S_k \leq S_j),$$

R et S sont les rangs des variables aléatoires X et Y .

Genest et Rivest recommandent plutôt de tracer la fonction :

$$\lambda_n = w - K_n(w), \quad w \in (0, 1).$$

Cette fonction conduit à une estimation non paramétrique du générateur φ :

$$\varphi_n(t) = \exp \left\{ \int_{w_0}^w \frac{1}{\lambda_n(w)} dw \right\}.$$

À la figure 2.11 nous retrouvons la représentation de la fonction λ_n pour les données empiriques entre les marchés canadien et américain comparée aux copules théoriques de Clayton, Gumbel et Frank (Genest et Rivest 1993) respectivement.

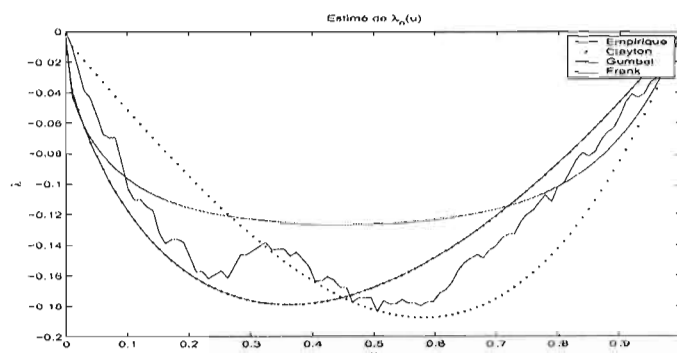


FIG. 2.11 – Représentation de la fonction λ_n : marchés canadien et américain.

2.2.11 Illustration de la fonction de dépendance entre les marchés canadien et américain

Pour d'illustrer une structure de dépendance par une copule nous avons choisi d'utiliser la distribution conjointe des rendements quotidiens de deux indices boursiers, l'indice des actions canadiennes SPTSX et l'indice des actions américaines S&P500. Au graphique 2.12 nous retrouvons à la fois les rendements conjoints de chacun des deux marchés ainsi que l'ordonnancement selon leurs rangs. La période couverte s'étend de 1992 à 2006, ce qui représente 3389 paires d'observations quotidiennes.

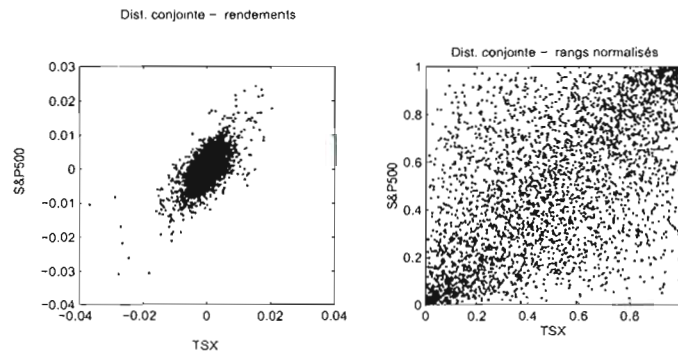


FIG. 2.12 – Rendements conjoints de l'indice TSX et S&P 500.

Dans cet exemple, nous avons calculé la copule empirique, construite à partir des paires d'observations quotidiennes entre ces deux marchés. Au tableau 2.2 à la page 82 nous retrouvons la distributions des paires de rendements qui forment la copule $C(u, v)$ donnée par l'équation $C(u, v) = \mathbb{P}(U \leq u, V \leq v)$. Par exemple, la partie du haut du tableau, vis-à-vis la ligne 0.1 et sous la colonne 0.1 on lit la valeur 0.051, cette valeur indique une probabilité de 5.1% qu'à la fois les marchés canadien et américain aient un classement inférieur à 0.1 et 0.1. Alors que la valeur 0.397 trouvée à l'intersection de la colonne 0.6 et de la ligne 0.5 indique que 39.7% de l'ensemble des observations se trouvent aux déciles 1 à 6 pour le SPTSX et aux déciles 1 à 5 pour le S&P 500. On retrouve 100% des observations, colonne 1.0 et ligne 1.0. La fonction $C(u, v)$ est une

fonction cumulative.

À la partie du bas du tableau **2.2** on trouve la fonction $c(u, v)$ qui est la fonction de densité conjointe. La fonction $c(u, v)$ déterminée par

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}.$$

Ainsi, par exemple, la valeur à l'intersection de la colonne 0.6 et de la ligne 0.5 indique que la probabilité que le rendement du marché canadien soit au décile 6 et qu'en même temps le marché américain au décile 5, est de 1.6%.

À la figure **2.12**, on remarque une plus forte concentration des rangs aux extrémités de la distribution ce qui est soutenu par les valeurs du tableau **2.2**; la partie du bas. Pour deux variables aléatoires indépendantes, la distribution des rangs devrait être près de 1% pour chacune des cent cellules. Pour les marchés canadien et américain, 9.5% des observations sont concentrées dans les deux queues des distributions, 5.1% et 4.4% dans les queues inférieure et supérieure respectivement. Cela indique une forte dépendance caudale.

TAB. 2.2 – Copule empirique générée à partir des rendements conjoints quotidiens entre les marchés canadien et américain pour la période de 1992 à 2006.

$C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ nobs =3389										
U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.051	0.067	0.079	0.085	0.090	0.094	0.097	0.099	0.099	0.100
0.2	0.073	0.109	0.138	0.154	0.166	0.176	0.187	0.194	0.199	0.200
0.3	0.084	0.140	0.182	0.210	0.237	0.253	0.271	0.286	0.295	0.300
0.4	0.091	0.158	0.214	0.257	0.297	0.325	0.352	0.375	0.391	0.400
0.5	0.093	0.171	0.238	0.299	0.353	0.397	0.434	0.467	0.489	0.500
0.6	0.095	0.181	0.258	0.331	0.397	0.456	0.508	0.550	0.584	0.600
0.7	0.097	0.189	0.276	0.358	0.436	0.508	0.573	0.631	0.676	0.700
0.8	0.099	0.195	0.288	0.377	0.466	0.547	0.629	0.704	0.768	0.800
0.9	0.099	0.198	0.295	0.391	0.486	0.577	0.672	0.761	0.844	0.900
1.0	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700	0.800	0.900	1.000

$c(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{\partial^2 C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}{\partial u \partial v}$ nobs =3389										
U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.051	0.016	0.012	0.006	0.005	0.004	0.003	0.001	0.001	0.001
0.2	0.022	0.020	0.017	0.009	0.007	0.006	0.007	0.006	0.004	0.001
0.3	0.011	0.020	0.013	0.012	0.014	0.007	0.007	0.008	0.004	0.004
0.4	0.007	0.012	0.013	0.016	0.012	0.012	0.009	0.008	0.008	0.004
0.5	0.003	0.009	0.012	0.017	0.015	0.016	0.011	0.010	0.006	0.002
0.6	0.001	0.009	0.010	0.012	0.012	0.015	0.015	0.009	0.011	0.006
0.7	0.002	0.006	0.010	0.009	0.012	0.012	0.014	0.016	0.012	0.008
0.8	0.002	0.004	0.006	0.007	0.012	0.009	0.017	0.017	0.019	0.008
0.9	0.000	0.003	0.004	0.007	0.006	0.010	0.013	0.014	0.019	0.024
1.0	0.001	0.001	0.002	0.005	0.004	0.009	0.005	0.012	0.017	0.044

2.2.12 Évolution de la dépendance et étude des distributions marginales

Nous croyons que la structure de dépendance évolue dans le temps. L'historique récent des marchés financiers nous l'a démontré, nous avons connu des périodes calmes et des périodes de fortes turbulences. Il est pertinent, dans un tel contexte d'étudier le comportement de la structure de dépendance entre les marchés financiers selon différentes périodes.

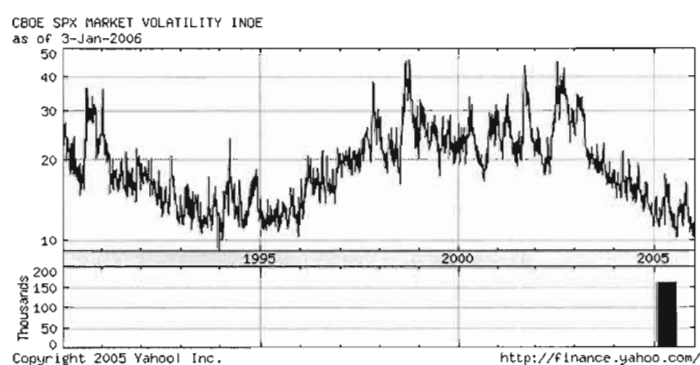


FIG. 2.13 – Volatilité implicite du S&P500, indice VIX.

Au graphique 2.13 on peut observer la volatilité de l'indice S&P 500. L'indice VIX est calculée à partir de la volatilité implicite de plusieurs options dont le sous-jacent est l'indice S&P 500.

Afin de comparer l'évolution de la dépendance nous avons utilisé deux sous-périodes de l'échantillon, la période de 1992 à 1997, une période de volatilité dite normale et la période de 1997 à 2003, une période de volatilité élevée. L'indice VIX nous a guidé dans le choix des sous-périodes tel que présenté aux figures 2.13 et 2.14.

La période 1992 à 1996, présentée à la figure 2.15 montre moins de concentration dans le regroupement des paires de rendements entre le TSX et le S&P500. D'autre part, la période 1997-2003, illustrée au graphique 2.16 montre un regroupement plus

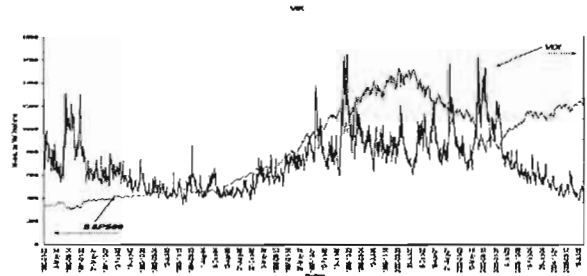


FIG. 2.14 – Indice VIX et l'évolution des rendements du S&P 500 (depuis 1990).

TAB. 2.3 – TSX et S&P500 pour des périodes de volatilité différentes.

Paramètres GARCH	1992-1996 Volatilité normale		1997-2003 Volatilité élevée		1992-2006 Échantillon complet	
	S&P500	TSX	S&P500	TSX	S&P500	TSX
ω	0.00000038	0.00000023	0.00000212	0.00000078	0.00000013	0.00000015
α	0.03416067	0.06759735	0.09849442	0.09134535	0.3588552	0.07813774
β	0.91969047	0.90113627	0.84237205	0.88266387	0.93589617	0.91607727
Persistence	0.95385115	0.96873362	0.94086646	0.97400922	0.99475138	0.99421501
MLE	4871.8	4998.5	5786.3	6049.7	13883.2	14338.0
θ Clayton	0.699		2.034		1.474	
θ Gumbel	1.345		2.017		1.737	
τ Kendall	0.259		0.504		0.424	
ρ Pearson	0.373		0.688		0.589	

importante des rendements entre les marchés canadien et américain. Ces regroupements se manifestent principalement dans les queues des distributions. Nous n'observons pas la même force de dépendance pour les deux périodes.

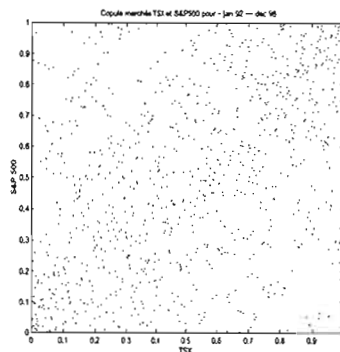


FIG. 2.15 - Représentation de la structure de dépendance entre les marchés TSX et S&P500 pour la période 1992 à 1996.

Les graphiques *chi-plot* nous permettent de visualiser la structure de dépendance qui caractérisent chacune de ces périodes : volatilité élevée (1997-2003) et volatilité normale (1992-1993). Au graphique 2.17 on peut observer une nette différence entre ces deux périodes.

Pour la période 1992-1996 l'ensemble des points se rapprochent de l'axe $\chi = 0$, alors qu'on observe un éloignement beaucoup plus prononcé pour la période de forte volatilité par rapport à l'axe $\chi = 0$. L'éparpillement des points, dans le quadrant I, pour la période de forte volatilité suggère un plus grand nombre d'observations dans les queues de la distribution conjointe.

En conclusion nous avons vu que les corrélations entre deux marchés peuvent varier selon la période de temps choisie. Les mesure de corrélations sont différentes, selon la période, pour la corrélation linéaire, la corrélation de rang et celle fournie par les *chi-plot*. Cependant, la fonction de dépendance établie par les fonctions copules est une mesure de probabilité, en conséquence, la probabilité ne change pas selon la période de volatilité choisie. L'information fournie par une copule, qui mesure la dépendance entre deux ou plusieurs marchés financiers, offre beaucoup plus d'informations que les mesures généralement utilisées par les intervenants dans l'industrie de la finance de marché. Rémillard et Scaillet, 2009 (28) ont développé un test d'égalité entre deux

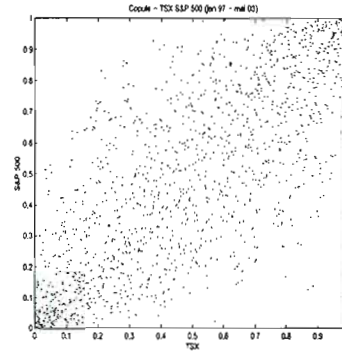


FIG. 2.16 – Représentation de la structure de dépendance entre les marchés TSX et S&P500 pour la période 1997 à 2003.

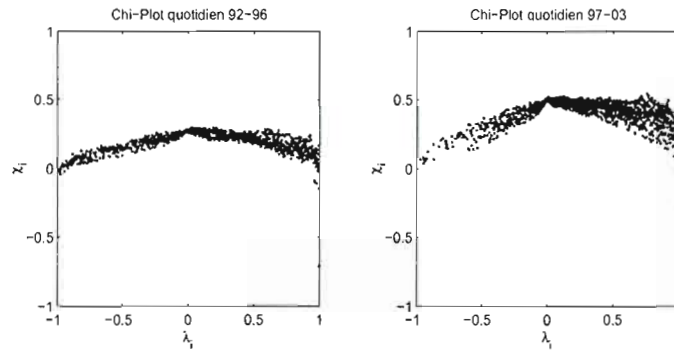


FIG. 2.17 – *Chi-Plot* pour le TSX et le S&P500 (1992-1996 τ Kendall = 0.258) et (1997-2003 τ de Kendall = 0.504).

structures de dépendance estimées à partir de copules empiriques, les exemples ont été tirés de la finance, de la psychologie, de l'assurance et de la médecine.

Chapitre III

VALORISATION D'UNE OPTION

3.1 Introduction

Les options sur plus d'un actif financier¹ peuvent être considérées comme des outils de couverture des risques. Ces options, calls ou puts, donnent droit à leurs détenteurs d'acheter ou de vendre l'actif ayant le mieux ou le moins bien performé pendant une période de temps donnée. Ces options sont transigées hors bourse, en conséquence leurs valeurs marchandes n'étant pas disponibles il est impossible de calibrer ces modèles à partir de données de marché.

Dans la documentation financière nous retrouvons plusieurs méthodologies pour valoriser une option sur plus d'un sous-jacent. Les principales méthodologies sont :

Margrabe (24) Une option pour échanger un actif risqué pour un autre actif risqué.

L'évaluation ne repose pas sur l'actif sans risque mais sur un changement de numéraire.

Stulz (32) Présente une méthodologie qui donne une formule analytique pour valoriser des options (put ou call) de type européen, sur le minimum ou le maximum entre deux actifs risqués.

Boyle (5) La procédure développée par Boyle peut être utilisée pour valoriser tout *actif contingent* dont les paiements sont basés sur deux actifs financiers dont les prix de ces actifs suivent des distributions log-normales.

¹Les options sur plusieurs actifs financiers sont aussi connues sous le nom de «rainbow options».

Monte Carlo Les simulations par les méthodes de Monte Carlo offrent une grande flexibilité, en particulier pour la valorisation d'options. Les estimés obtenus par les méthodes de Monte Carlo reposent sur l'échantillonnage aléatoire. La loi des grands nombres nous assure que l'estimé converge vers la vraie valeur.

Copule Il existe plusieurs modèles de valorisation des options sur plusieurs actifs avec les copules. Ces dernières offrent une panoplie de possibilités dû au fait que l'utilisation d'une copule permet de dissocier les marges de leurs structures de dépendance. Ainsi, nous pouvons simuler le comportement d'une distribution conjointe en simulant une copule et en modélisant les marges. Il n'est pas nécessaire que les marges soient de même loi.

Les modèles de valorisation des options découlent de l'univers neutre au risque. On retrouve plusieurs modèles dont la dépendance est représentée par le coefficient de corrélation linéaire. Or, la corrélation linéaire comme l'ont montré Embrechts et al (11) n'est pas une mesure satisfaisante pour mesurer la dépendance entre les marchés financiers.

Rappelons que l'univers Black-Scholes repose principalement sur l'hypothèse de la normalité. Les rendements des actifs financiers ne s'y conforment pas toujours.

La valorisation des options présente de nombreux défis d'ordre à la fois théorique et pratique. Entre autres,

1. L'effet *smile*,
2. La non-normalité des rendements,
3. L'épaisseur des queues des distributions des rendements des actifs sous-jacents,
4. L'asymétrie des rendements des marchés financiers,
5. L'aplatissement de la distribution des rendements,
6. Les corrélations non constantes entre les marchés financiers.

Les copules permettent de contourner certains de ces problèmes. Dans ce chapitre nous étudions la valorisation d'une option en utilisant les copules dans un contexte GARCH

et nous comparons les résultats obtenus pour le cas de deux actifs avec la méthodologie développée par Stulz (32), exposée à l'annexe B. Pour le cas de plus de deux actifs financiers la comparaison est établie par des simulations de Monte Carlo, décrites à l'annexe D.

3.2 Valorisation d'options avec un modèle GARCH-Copule

Comme nous l'avons déjà mentionné, les modèles GARCH prennent en compte l'aplatissement de la distribution des rendements, ces modèles tiennent aussi compte des regroupements de volatilités qui caractérisent les séries chronologiques des marchés financiers.

Les modèles GARCH, de par leur nature, sont paramétriques ; ils sont plus efficaces sous des conditions stables de marché. Ils captent mal les marchés hautement irréguliers, par exemple des crashes boursiers suivis de périodes de rebonds, tel que ceux que nous avons vécu au troisième trimestre de 2008.

De grands chocs dans les marchés, positifs ou négatifs, deviennent partie intégrante de l'ensemble de l'information utilisée pour la construction de la prévision de la variance pour la prochaine période. Ainsi, les chocs importants de signes positifs ou négatifs persistent et peuvent influencer la prévision de volatilité pour plusieurs périodes.

La méthodologie appliquée ici a déjà été utilisée pour valoriser des options sur plus de deux actifs financiers². Dans ce chapitre nous reprenons cette méthodologie et nous comparons les résultats à d'autres méthodes d'évaluation. La démarche se divise en deux parties. La première partie modélise les marges alors que la seconde partie modélise la structure de dépendance. Les fonctions marginales sont établies à partir des innovations simulées d'un modèle GARCH tel que proposé par Duan (1995), alors que la structure de dépendance, pour sa part, est simulée à partir de la génération de copules.

²Voir Bouchra Abakarim. «Evaluation d'options sur plusieurs sous-jacents par des modèles de copules.» Master's thesis, 2005. (2), la thèse a été rédigée sous la direction du professeur Bruno Rémillard.

3.2.1 GARCH(1,1)

Dans ce chapitre nous utilisons le modèle de variance GARCH(1,1) décrit à la section (2.2.3) à la page (58). Le modèle GARCH(1,1) est décrit par l'équation suivante :

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha R^2 + \beta \sigma_{t-1}^2. \quad (3.1)$$

Notons que les modèles GARCH(1,1) captent en grande partie la variabilité présente dans les séries chronologiques. Pour valoriser une option sur plus d'un actif financier, dans leur travaux Goorbergh, Genest et Werker (2005) (33) proposent l'utilisation de simulations de Monte Carlo, où des paires de variables aléatoires sont tirées à partir de copules dans un univers neutre au risque. Ces variables sont ensuite transformées en innovations selon le modèle GARCH de Duan (1995). Par la suite, on calcule la moyenne actualisée de chacun des paiements implicites. Ces résultats constituent alors la juste valeur de l'option. La copule des innovations standardisées est la même sous la mesure \mathbb{Q} (neutre au risque) que sous la mesure \mathbb{P} (mesure objective).

Nous choisissons pour les fonctions marginales les distributions proposées par Duan (1995) et décrites dans l'article de Goorbergh, Genest et Werker (2005). La distribution objective est facilement transformable en une distribution neutre au risque. Cette façon de faire, bien que relativement simple, permet de saisir les regroupements de volatilités.

1. Les distributions marginales des rendements des indices boursiers sont modélisées par le modèle GARCH(1,1) à partir d'innovations gaussiennes :

$$\begin{aligned} r_{i,t+1} &= \mu_i + \eta_{i,t+1}, \\ \eta_{i,t+1} | \mathcal{I}_t &\sim \mathcal{N}(0, h_{i,t}), \\ h_{i,t+1} &= \omega_i + \beta_i h_{i,t} + \alpha_i \eta_{i,t+1}^2, \\ \mathcal{L}_{\mathbb{P}}(\eta_{i,t+1} | \mathcal{I}_t) &= \mathcal{N}(0, h_{i,t}), \end{aligned}$$

$\omega_i > 0$, $\beta_i > 0$, $\alpha_i > 0$ et $\mathcal{L}_{\mathbb{P}}(\cdot | \mathcal{I}_t)$ représente la loi de probabilité objective conditionnelle à l'ensemble de l'information disponible au temps t . Les distributions

marginales sont conditionnelles à l'ensemble de l'information \mathcal{I}_t , la théorie des copules peut alors être utilisée pour la construction de la distribution conjointe conditionnelle à l'ensemble d'information \mathcal{I}_t .

Les paramètres GARCH sont estimés par le ratio de vraisemblance maximale. Habituellement la variance non-conditionnelle est calculée par $\sigma^2 = \omega_i / (1 - \beta_i - \alpha_i)$ comme valeur de départ pour la variable $h_{i,0}$,

2. Mentionnons aussi que le théorème de Sklar justifie l'utilisation de n'importe quelle distribution marginale,
3. Le modèle GARCH permet facilement le passage de la mesure objective \mathbb{P} à la mesure à risque neutre \mathbb{Q} . Notons que le changement de mesure revient à changer la dérive du processus stochastique (théorème de Guirsanov),
4. La loi des rendements sous la mesure à risque neutre \mathbb{Q} , est donnée par :

$$\begin{aligned} r_{i,t+1} &= r_f - \frac{1}{2}h_{i,t} + \eta_{i,t+1}^*, \\ \eta_{i,t+1}^* | \mathcal{I}_t &\sim \mathcal{N}(0, h_{i,t}), \\ h_{i,t+1} &= \omega_i + \beta_i h_{i,t} + \alpha_i (r_{i,t+1} - \mu_i)^2, \\ \mathcal{L}_{\mathbb{P}}(\eta_{i,t+1}^* | \mathcal{I}_t) &= \mathcal{N}(0, h_{i,t}). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Les innovations standardisées sont représentées par :

$$\varepsilon_{i,t+1}^* = \left(\frac{\eta_{i,t+1}^*}{\sqrt{h_{i,t+1}}} \right), \quad i = 1, \dots, d$$

et

$$\varepsilon_{i,t+1}^* | \mathcal{I}_t \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

nous avons ainsi

$$\eta_{i,t+1}^* = \varepsilon_{i,t+1}^* \times \sqrt{h_{i,t+1}}, \quad i = 1, \dots, d.$$

Le rendement, à la période t , d'un actif sous-jacent sous la mesure \mathbb{P} (mesure objective) est donné par :

$$\ln \frac{S_t}{S_{t-1}} = r + \lambda \sqrt{h_t} - \frac{1}{2}h_t + \varepsilon_t,$$

S_t est le prix de l'actif risqué au temps t . ε_t est de moyenne 0 et de variance conditionnelle h_t sous la mesure \mathbb{P} . r est le taux de rendement sans risque continu pour une période et λ est une prime au risque constante. Afin de développer un modèle GARCH pour la valorisation d'une option, Duan (1995) suggère de faire l'évaluation à risque neutre qui prend en compte de l'aplatissement de la distribution des rendements des actifs sous-jacents. La mesure d'évaluation neutre au risque \mathbb{Q} doit se faire sous une mesure locale neutre au risque *Locally Risk-Neutral Valuation Relationship (LRNVR)*.

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \middle| \mathcal{I}_{t-1} \right) = e^r.$$

De plus,

$$\text{Var}^{\mathbb{Q}} \left(\ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) \middle| \mathcal{I}_{t-1} \right) = \text{Var}^{\mathbb{P}} \left(\ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) \middle| \mathcal{I}_{t-1} \right),$$

les variances conditionnelles sous les deux mesures doivent être égales.

Définition 3.2.1 *LRNVR* La mesure \mathbb{Q} satisfait l'évaluation locale neutre au risque (*LRNVR*) si la mesure \mathbb{Q} est absolument continue par rapport à la mesure \mathbb{P} :

$$\left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \middle| \mathcal{I}_{t-1} \right) = e^r.$$

Sous la mesure \mathbb{Q} , LRNVR implique

$$\ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) = r - \frac{1}{2} h_t + \xi_t,$$

où

$$\xi_t \middle| \mathcal{I}_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, h_t),$$

et

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \left(\xi_{t-i} - \lambda \sqrt{h_{t-i}} \right)^2 + \sum_{i=1}^p \beta_i h_{t-i}, \quad (3.3)$$

ainsi sous la neutralisation locale du risque, le modèle conserve le GARCH(p,q) intact.

De plus, nous pouvons voir que $\xi_{t-i}/\sqrt{h_{t-i}}$ est une variable aléatoire normale standard sous la mesure \mathbb{Q} . Ces estimés sont basés sur la variance initiale dont le niveau est donné par :

$$h_{i,0} = \frac{\omega_i}{1 - \alpha_i - \beta_i} \text{ pour } i = 1, \dots, d.$$

La somme de $\alpha_i + \beta_i$, la persistance du modèle GARCH, est près de 1.

Ceci s'explique par le fait que le modèle GARCH, est un modèle dynamique de la variance. Il peut s'écrire sous la forme :

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha R_t^2 + \beta \sigma_t^2, \text{ avec } \alpha + \beta < 1,$$

car

$$\begin{aligned} \sigma^2 &\equiv \mathbb{E} [\sigma_{t+1}^2] = \omega + \alpha \mathbb{E} [R_t^2] + \beta \mathbb{E} [\sigma_t^2] \\ &= \omega + \alpha \sigma^2 + \beta \sigma^2 \\ \sigma^2 &= \frac{\omega}{1 - \alpha - \beta}. \end{aligned}$$

La valeur finale de l'actif financier, selon le modèle GARCH, est donnée par :

$$S_T = X_0 e^{\left\{ T \times r - \frac{1}{2} \sum_{s=1}^T h_s + \sum_{s=1}^T \xi_s \right\}}, \quad (3.4)$$

T est l'échéance de l'option,

ξ_s est une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0, h_s)$ et

h_s est donné par l'équation (3.3),

sous la mesure neutre au risque \mathbb{Q} . La valeur de l'actif, actualisée au taux de rendement neutre au risque possède la propriété de martingale.

Corollaire 2 (\mathbb{Q} -Martingale) *Le processus de la valeur actualisée d'un actif $e^{-rt} S_t$ est une \mathbb{Q} -martingale.*

La démonstration de ce corollaire est trouvée à l'annexe de l'article de Duan (10). De plus le modèle de valorisation des options européennes GARCH(1,1) est explicitement à deux états : (1) le niveau de prix et (2) le niveau conditionnel de volatilité. Le niveau de volatilité permet de refléter le niveau de volatilité de l'actif sous-jacent quand l'état de l'économie change. Le modèle GARCH(1,1) est le plus utilisé des modèles GARCH. L'équation suivante caractérise le modèle GARCH(1,1) :

$$h_t = \omega + \alpha \left(\xi_{t-1} - \lambda \sqrt{h_{t-1}} \right)^2 + \beta h_{t-1}.$$

3.3 Valorisation d'une option sur plus d'un actif sous-jacent

L'intérêt de l'utilisation des copules pour la valorisation d'options sur plus d'un actif sous-jacent réside dans le fait que l'on peut tenir compte de la structure de dépendance entre deux ou plusieurs actifs. La structure de dépendance peut être représentée par plusieurs copules. Le choix des marges est indépendant du choix de la structure de dépendance ou de la copule. De plus, il est possible de représenter l'évolution de l'actif financier par des marges de lois différentes. Ainsi, la méthodologie qui utilise les copules offre beaucoup de possibilités. L'utilisation des copules peut facilement être étendue à la valorisation d'options sur plus de deux titres sous-jacents (*rainbow-options*). Comme nous l'avons mentionné le coefficient de corrélation linéaire n'est pas toujours satisfaisant, comme l'ont exposé Embrechts, McNeil et Staumann, (1999) p. 7 (11).

Types d'options

Nous pouvons calculer la valeur de plusieurs types d'options, par exemple :

Put on min $\max((X - \min(S_{T,1}, S_{T,2}), 0)$,

Put on max $\max((X - \max(S_{T,1}, S_{T,2}), 0)$,

Call on min $\max((\min(S_{T,1}, S_{T,2}) - X), 0)$,

Call on max $\max((\max(S_{T,1}, S_{T,2}) - X), 0)$.

3.3.1 Valorisation d'une option sur deux actifs sous-jacents par les copules

Dans une première étape nous exposons une méthodologie pour valoriser une option sur deux actifs financiers en utilisant les copules gaussiennes pour la structure de dépendance et un processus GARCH(1,1) pour les marges. Dans une seconde étape nous allons valoriser une option sur deux actifs sous-jacents avec l'aide de copules archimédiennes pour la structure de dépendance.

Options à partir de copules gaussiennes

La simulation de la valeur d'une option à partir d'une copule gaussienne se fait en deux étapes : (1) simuler la structure de dépendance et (2) simuler les marges :

1. Structure de dépendance : nous simulons un vecteur de deux nombres aléatoires selon une $\mathcal{N}(0,1)$ à partir de l'algorithme de Box-Müller, ensuite nous appliquons la transformation suivante donné par l'équation 3.5 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

où ρ est le coefficient de corrélation linéaire. Nous remarquons aussi que la matrice donnée par l'équation (3.5) est la transformée de Cholesky de la matrice des corrélations pour deux variables aléatoires,

2. Marges : nous simulons les marges par un processus GARCH(1,1) tel que proposé par Duan (1995),
3. La juste valeur de l'option : est obtenue en actualisant la valeur finale au taux de rendement sans risque.

Options à partir de copules archimédiennes

Dans cette section nous allons valoriser une option sur deux actifs financiers à l'aide de copules archimédiennes. Trois types de copules archimédiennes sont utilisées, copules de Clayton, Gumbel et Frank. Les copules archimédiennes tiennent compte de la structure de dépendance entre les marchés financiers.

La démarche suivante est utilisée :

1. Générer une copule bivariée avec un τ de Kendall donné. La méthodologie proposée par Marshall et Olkin est utilisée voir (25). La structure de dépendance qui unit les actifs financiers entre eux est ainsi reproduite,
2. Les marges sont simulées à partir d'innovations d'un processus GARCH(1,1) tel que décrit à la section 3.2.1,

3. La juste valeur de l'option est obtenue en actualisant la valeur finale au taux de rendement sans risque.

Comparaison entre les deux méthodes : Le marché des options sur plus d'un actif sous-jacent étant un marché hors-bourse, il n'existe pas de données publiques pour ces options. Pour valider la méthodologie employée pour la valorisation des options «rainbow» par la théorie des copules il est nécessaire de pouvoir comparer les résultats avec une méthodologie connue. Stulz 1982 a développé une formule analytique permettant l'évaluation d'options européennes sur deux sous-jacents. En conséquence, les résultats obtenus pour deux actifs sous-jacents avec les copules gaussiennes sont comparés à ceux obtenus par Stulz. La méthodologie de Stulz est décrite à l'annexe B.

Pour comparer les valeurs des options obtenues par les deux méthodologies nous avons regroupé les valeurs obtenues en deux vecteurs, l'un avec les valeurs d'options établies par la méthodologie des copules gaussiennes et l'autre par la méthodologie de Stulz. Nous avons ensuite calculé le coefficient de corrélation entre ces deux vecteurs. Le coefficient de corrélation obtenu en comparant les deux vecteurs est de 97.2% avec un R^2 est de 94.4%. Ainsi, les deux méthodologies donnent lieu à des résultats similaires. Les principales différences sont dues à l'application du modèle GARCH pour la méthodologie des copules gaussiennes. De même si nous comparons les deux vecteurs, pour l'option d'échéance 1 mois nous obtenons un coefficient de corrélation de 98.7% avec un R^2 de 97.4%, en comparant avec une les options d'échéance 1 an nous obtenons un coefficient de corrélation de 96.3% et un R^2 de 92.6%. Plus l'échéance est longue, plus la méthodologie des simulations a tendance à s'éloigner de sa moyenne, puisque l'évaluation de l'option est basé sur deux processus stochastiques : un processus pour les valeurs des sous-jacents et l'autre pour la volatilité stochastique. Ces tests statistiques permettent de valider l'utilisation des copules pour l'évaluation d'une option sur plus d'un actif sous-jacent. Les paramètres utilisés pour l'option valorisée avec les copules sont les paramètres GARCH qui découlent des données historiques et la structure de dépendance est aussi issue d'une copule, alors que la méthodologie de Stulz utilise un écart type fixe pour la volatilité des

rendements et un coefficient de corrélation fixe aussi. En comparant les deux méthodes d'évaluation les résultats sont cohérents. L'ensemble des tableaux pour les échéances un mois, trois mois, six mois et un an sont exposés à l'annexe C.

À titre d'exemple aux tableaux (3.1) et (3.2) sont présentées les valeurs des options évaluées par les copules gaussiennes comparées aux mêmes options évaluées par la méthodologie de Stulz pour un mois et un an respectivement.

TAB. 3.1 – La valeur d'une option sur deux sous-jacents Canada et France.

Prix de levée	ÉCHÉANCE 1 MOIS τ de Kendall = 0.326, ρ = 0.490						
	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.15
	COPULES GAUSIENNES						
Call on Max	0.1735	0.1293	0.0809	0.0383	0.0155	0.0039	0.0011
Call on Min	0.1199	0.0772	0.0383	0.0120	0.0025	0.0003	0.0000
Put on Min	0.0007	0.0035	0.0130	0.0384	0.0780	0.1264	0.1753
Put on Max	0.0001	0.0002	0.0023	0.0123	0.0360	0.0759	0.1214
	MÉTHODOLOGIE DE STULZ						
Call on Max	0.1854	0.1362	0.0899	0.0511	0.02422	0.0094	0.0030
Call on Min	0.1213	0.0397	0.0397	0.0167	0.00537	0.0014	0.0003
Put on Min	0.0056	0.0192	0.0192	0.0459	0.0845	0.1303	0.1791
Put on Max	0.0007	0.0043	0.0043	0.0153	0.0382	0.0733	0.1167

TAB. 3.2 -- La valeur d'une option sur deux sous-jacents Canada et France.

Prix de levée	ÉCHÉANCE 1 AN τ de Kendall = 0.326, ρ = 0.490						
	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.15
	COPULES GAUSIENNES						
Call on Max	0.2593	0.2156	0.1671	0.1371	0.1090	0.0788	0.0735
Call on Min	0.1053	0.0790	0.0551	0.0441	0.0275	0.0172	0.0124
Put on Min	0.0454	0.0715	0.1081	0.1329	0.1615	0.2122	0.2438
Put on Max	0.0073	0.0173	0.0321	0.0485	0.0618	0.0920	0.1149
	MÉTHODOLOGIE DE STULZ						
Call on Max	0.3084	0.2685	0.2314	0.1976	0.1672	0.1402	0.1167
Call on Min	0.1264	0.1007	0.0614	0.0614	0.0471	0.0358	0.0269
Put on Min	0.0562	0.0785	0.1354	0.1354	0.1692	0.2059	0.2451
Put on Max	0.0133	0.0214	0.0467	0.0467	0.0643	0.0855	0.1100

3.3.2 Valorisation d'une option sur plusieurs sous-jacents

Copule gaussienne

Dans cette section nous valorisons une option sur plus de deux actifs sous-jacents, nous comparons ensuite les valeurs obtenues avec une méthode d'évaluation alternative, dans ce cas-ci, les simulations de Monte-Carlo sont choisies.

La démarche suivante est utilisée : nous simulons les marges à partir d'une loi gaussienne. Les marges sont simulées à partir de vecteurs aléatoires générés par des innovations d'un modèle GARCH(1,1), Duan 1993 (10). Cette méthodologie prend en compte les changements de volatilités qui caractérisent les marchés financiers. Ainsi, les variations des volatilités individuelles de chacun des marchés sont prises en compte. La structure de dépendance existant entre les marchés financiers est simulée par de tirs aléatoires d'une copule gaussienne de dimension d . La décomposition de Cholesky est utilisée et les valeurs finales des options sont ensuite obtenues en actualisant les résultats au taux de rendement neutre au risque.

La décomposition de Cholesky est utilisée pour tenir compte de la relation entre les rendements des différents indices boursiers. La relation suivante est implicitement appliquée :

$$\begin{aligned}x_{1,t} &= \ell_{1,1} \times z_{1,t}, \\x_{2,t} &= \ell_{2,1} \times z_{1,t} + \ell_{2,2} \times z_{2,t}, \\&\vdots = \vdots \\x_{d,t} &= \ell_{d,1} \times z_{1,t} + \ell_{d,2} \times z_{2,t} + \cdots + \ell_{d,d} \times z_{d,t},\end{aligned}$$

où

- $\ell_{i,j}$ sont éléments de la décomposition de Cholesky de la matrice de corrélation Σ ,
- $z_{i,j}$ pour $i \in \{1, \dots, d\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$, d le nombre de sous-jacents et

n le nombre de pas d'une simulation,

- $x_{i,j}$ sont les rendements simulés des sous-jacents $i = 1, \dots, d$ pour $j = 1, \dots, n$,

n le nombre de pas de la simulation.

Démarche

1. Partie pour la dépendance entre les variables aléatoires :
 - (a) Établir le nombre de simulations,
 - (b) Simuler un vecteur de variables aléatoires iid selon une loi normale centrée réduite, la dimension de ce vecteur aléatoire correspond au nombre de sous-jacents sur lesquels repose la valeur de l'option,
 - (c) Calculer la décomposition de Cholesky, la matrice L , à partir de la matrice des corrélations,
 - (d) Multiplier le vecteur de nombres $\mathcal{N}(0, 1)$ par la matrice L .
2. Partie pour les marges :
 - (a) Pour chaque titre sous-jacent auquel le panier d'options se rattache nous appliquons la méthodologie décrite à la section 3.2.1.

Copules archimédiennes

Démarche Pour les copules archimédiennes nous appliquons une méthodologie similaire à celle des options valorisées par des copules gaussiennes.

1. Partie pour la dépendance entre les variables aléatoires :
 - (a) Établir le nombre de simulations,
 - (b) Simuler un vecteur aléatoire correspondant à la copule archimédienne choisie, la dimension de ce vecteur aléatoire correspond au nombre d'actifs sous-jacents auxquels se rattache l'option à évaluer.
2. Partie pour les marges :
 - (a) Pour chaque titre sous-jacent auquel le panier d'options se rattache nous appliquons la méthodologie élaborée à la section 3.2.1.

Les copules archimédiennes, pour plusieurs variables aléatoires, comportent un inconvénient, le même paramètre doit être utilisé pour les copules qui entrent dans les simulations. Pour suivre la démarche pas à pas le lecteur peut, s'il le désire, étudier le programme à l'annexe G.

Remarque 2 *Notons que cette méthodologie d'évaluation n'est pas limitée en termes du nombre d'actifs sous-jacents.*

3.4 Résultats

Dans cette section une option sur six actifs sous-jacents est valorisée :

1. Canada,
2. France,
3. Allemagne,
4. Japon,
5. Angleterre,
6. États-Unis.

Pour ces six marchés au tableau 3.3 nous avons la matrice des corrélations établie à partir des données de marché :

TAB. 3.3 – Matrice de corrélation entre les six marchés choisis.

	Canada	France	Allemagne	Japon	Angleterre	États-Unis
Canada	1.000	0.491	0.425	0.331	0.528	0.722
France	0.491	1.000	0.676	0.393	0.579	0.506
Allemagne	0.425	0.676	1.000	0.364	0.483	0.481
Japon	0.331	0.393	0.364	1.000	0.375	0.310
Angleterre	0.528	0.579	0.483	0.375	1.000	0.543
États-Unis	0.722	0.506	0.481	0.310	0.543	1.000

Pour les six marchés nous avons aussi la matrice des taus de Kendall 3.4 :

La décomposition de Cholesky pour la matrice des corrélations est présentée au tableau 3.5 :

TAB. 3.4 – Matrice des Tau de Kendall entre les six marchés choisis.

	Canada	France	Allemagne	Japon	Angleterre	États-Unis
Canada	1.000	0.298	0.252	0.203	0.330	0.493
France	0.298	1.000	0.460	0.272	0.406	0.318
Allemagne	0.252	0.460	1.000	0.244	0.349	0.296
Japon	0.203	0.272	0.244	1.000	0.259	0.206
Angleterre	0.330	0.406	0.349	0.259	1.000	0.344
États-Unis	0.493	0.318	0.296	0.206	0.344	1.000

TAB. 3.5 – Transformée de Cholesky pour la matrice des corrélations.

	Canada	France	Allemagne	Japon	Angleterre	États-Unis
Canada	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
France	0.491	0.871	0.000	0.000	0.000	0.000
Allemagne	0.425	0.537	0.729	0.000	0.000	0.000
Japon	0.331	0.265	0.111	0.899	0.000	0.000
Angleterre	0.528	0.367	0.084	0.104	0.754	0.000
États-Unis	0.722	0.174	0.111	0.015	0.116	0.650

Au tableau 3.6 nous retrouvons les paramètres GARCH de chacun des six marchés :

TAB. 3.6 – Les paramètres GARCH pour les six marchés choisis.

	C_i	ω_i	β_i	α_i	Persistence
Canada	0.0032666	0.00013167	0.62612	0.15263	0.7787499726
France	0.0036944	0.000021164	0.83376	0.10393	0.93736900196
Allemagne	0.0031052	0.000036365	0.85268	0.097731	0.9504110292
Japon	0.0033431	0.000010449	0.93214	0.053299	0.9854389913
Angleterre	0.0032189	0.0000060866	0.90339	0.071944	0.9753339887
États-Unis	0.0025491	0.000011752	0.87015	0.10218	0.9723300263

Remarque en prenant les paramètres estimés selon le modèle GARCH et en calculant la valeur de $\omega/(1 - \alpha - \beta)$ nous retrouvons la valeur de la variance de l'indice boursier.

À l'annexe C.2 nous avons une série de tableaux qui fournissent les valeurs d'une option sur six actifs sous-jacents. Afin de valider la méthodologie utilisée nous avons

TAB. 3.7 – La valeur d’une option sur six actifs sous-jacents Canada, France, Allemagne, Angleterre, Japon et États-Unis échéance un mois.

Prix de levée	ÉCHÉANCE 1 MOIS						
	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.15
	COPULES GAUSSIENNES						
Call on Max	0.2144	0.1680	0.1131	0.0711	0.0334	0.0137	0.0042
Call on Min	0.0889	0.0478	0.0167	0.0039	0.0002	0.0000	0.0000
Put on Min	0.0024	0.0102	0.0323	0.0674	0.1149	0.1630	0.2145
Put on Max	0.0000	0.0000	0.0003	0.0038	0.0168	0.0471	0.0897
	COPULES DE CLAYTON						
Call on Max	0.2287	0.1752	0.1260	0.0797	0.0360	0.0145	0.0035
Call on Min	0.0820	0.0420	0.0123	0.0014	0.0000	0.0000	0.0000
Put on Min	0.0025	0.0096	0.0331	0.0686	0.1193	0.1717	0.2205
Put on Max	0.0000	0.0000	0.0000	0.0015	0.0119	0.0391	0.0800
	COPULES DE GUMBEL						
Call on Max	0.2188	0.1750	0.1210	0.0725	0.0355	0.0118	0.0021
Call on Min	0.0802	0.0420	0.0121	0.0017	0.0002	0.0000	0.0000
Put on Min	0.0027	0.0100	0.0369	0.0758	0.1227	0.1743	0.2224
Put on Max	0.0000	0.0000	0.0001	0.0013	0.0128	0.0386	0.0829
	COPULES DE FRANK						
Call on Max	0.2230	0.1731	0.1269	0.0774	0.0395	0.0135	0.0033
Call on Min	0.0785	0.0384	0.0123	0.0014	0.0000	0.0000	0.0000
Put on Min	0.0035	0.0117	0.0346	0.0736	0.1191	0.1728	0.2242
Put on Max	0.0000	0.0000	0.0000	0.0012	0.0100	0.0396	0.0797

TAB. 3.8 – La valeur d’une option sur six actifs sous-jacents Canada, France, Allemagne, Angleterre, Japon et États-Unis échéance un an.

Prix de levée	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.15
ÉCHÉANCE 1 AN							
COPULES GAUSSIENNES							
Call on Max	0.3973	0.3518	0.3051	0.2608	0.2152	0.1744	0.1550
Call on Min	0.0419	0.0292	0.0177	0.0114	0.0046	0.0032	0.0017
Put on Min	0.1078	0.1410	0.1780	0.2283	0.2789	0.3227	0.3605
Put on Max	0.0021	0.0045	0.0068	0.0151	0.0253	0.0402	0.0541
COPULES DE CLAYTON							
Call on Max	0.4330	0.3921	0.3114	0.2910	0.2454	0.2084	0.1742
Call on Min	0.0256	0.0187	0.0083	0.0047	0.0018	0.0008	0.0003
Put on Min	0.1167	0.1547	0.2035	0.2349	0.2923	0.3353	0.3872
Put on Max	0.0007	0.0010	0.0054	0.0093	0.0152	0.0234	0.0389
COPULES DE GUMBEL							
Call on Max	0.4238	0.3679	0.3155	0.2946	0.2480	0.1932	0.1638
Call on Min	0.0259	0.0174	0.0096	0.0056	0.0033	0.0017	0.0005
Put on Min	0.1235	0.1520	0.1970	0.2415	0.2901	0.3426	0.3913
Put on Max	0.0003	0.0015	0.0039	0.0058	0.0137	0.0232	0.0402
COPULES DE FRANK							
Call on Max	0.4345	0.3910	0.3317	0.2948	0.2432	0.1920	0.1623
Call on Min	0.0253	0.0195	0.0074	0.0042	0.0014	0.0006	0.0005
Put on Min	0.1171	0.1511	0.1992	0.2451	0.3019	0.3514	0.4045
Put on Max	0.0002	0.0011	0.0033	0.0055	0.0129	0.0226	0.0383

comparé les résultats de l'évaluation sur six actifs sous-jacents avec les résultats obtenus par des simulations de Monte Carlo dont la méthodologie est présentée à l'annexe D. À titre d'exemple aux tableaux 3.9, 3.10 nous retrouvons les comparaisons de l'évaluation des options *Call on Max*, *Call on Min*, *Put on Min* et *Put on Max* sur les six marchés.

TAB. 3.9 - La valeur d'une option sur six actifs sous-jacents Canada, France, Allemagne, Angleterre, Japon et États-Unis échéance un mois.

Prix de levée	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.15
	ÉCHÉANCE 1 MOIS						
	COPULES GAUSSIENNES						
Call on Max	0.2144	0.1680	0.1131	0.0711	0.0334	0.0137	0.0042
Call on Min	0.0889	0.0478	0.0167	0.0039	0.0002	0.0000	0.0000
Put on Min	0.0024	0.0102	0.0323	0.0674	0.1149	0.1630	0.2145
Put on Max	0.0000	0.0000	0.0003	0.0038	0.0168	0.0471	0.0897
	SIMULATIONS MONTE-CARLO						
Call on Max	0.2039	0.1541	0.1044	0.0572	0.0214	0.0053	0.0007
Call on Min	0.1067	0.0589	0.0215	0.0040	0.0004	0.0000	0.0000
Put on Min	0.0001	0.0021	0.0146	0.0472	0.0933	0.1426	0.1926
Put on Max	0.0000	0.0000	0.0001	0.0032	0.0172	0.0506	0.0963

Comme pour le cas de l'évaluation des options sur deux actifs sous-jacents nous avons créé des vecteurs des différentes valeurs d'options pour les prix de levée, à la fois pour l'échéance d'un mois et pour l'échéance d'un an et nous avons trouvé un coefficient de corrélation entre les deux méthodes de 97.2% avec un R^2 de 94.4%.

À la figure suivante 3.1 nous avons la représentation graphique des différentes valeurs d'options selon les copules choisies : gaussiennes, Clayton, Gumbel et Frank. En conclusion la valorisation d'une option sur plusieurs actifs sous-jacents est mieux évaluée à partir des copules car ces dernières tiennent compte adéquatement de la structure de

TAB. 3.10 – La valeur d’une option sur six actifs sous-jacents Canada, France, Allemagne, Angleterre, Japon et États-Unis échéance un an.

Prix de levée	ÉCHÉANCE 1 AN						
	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.15
	COPULES GAUSSIENNES						
Call on Max	0.3973	0.3518	0.3051	0.2608	0.2152	0.1744	0.1550
Call on Min	0.0419	0.0292	0.0177	0.0114	0.0046	0.0032	0.0017
Put on Min	0.1078	0.1410	0.1780	0.2283	0.2789	0.3227	0.3605
Put on Max	0.0021	0.0045	0.0068	0.0151	0.0253	0.0402	0.0541
	SIMULATIONS MONTE-CARLO						
Call on Max	0.3625	0.3203	0.2743	0.2301	0.1890	0.1515	0.1187
Call on Min	0.0695	0.0459	0.0289	0.0174	0.0101	0.0056	0.0031
Put on Min	0.0409	0.0654	0.0965	0.1330	0.1737	0.2172	0.2628
Put on Max	0.0003	0.0011	0.0031	0.0071	0.0140	0.0245	0.0398

dépendance qui existe entre les marchés financiers.

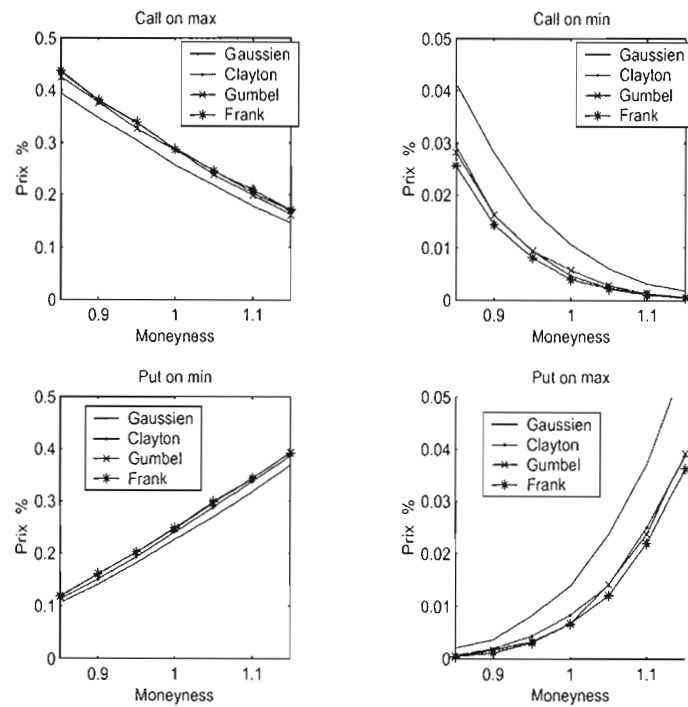


FIG. 3.1 – Valeurs des options selon leurs *moneyness*, options d'échéance 1 an avec 10 000 simulations.

Chapitre IV

LES FONDS DE COUVERTURE

4.1 Pourquoi investir dans un fonds de couverture

L'une des principales raisons qui motivent un investissement dans un fonds de couverture est que la source des rendements diffère de celle des classes traditionnelles d'actifs, comme les obligations ou les actions. Les fonds de couvertures sont en général structurés pour apporter un rendement absolu, c'est-à-dire un rendement qui n'est pas lié à un indice de marché. La composition de ce type de fonds s'éloigne grandement de la structure de fonds traditionnel, apportant ainsi un élément de diversification. Ajouter un ou plusieurs fonds de couverture à un portefeuille diversifié dans des classes traditionnelles d'actifs devrait amener une structure de rendement moins volatile qu'un portefeuille composé uniquement de ces classes d'actifs. Même si on ne doit pas choisir une classe d'actif uniquement basée sur ses rendements historiques, les fonds de couverture peuvent présenter un ajout intéressant à un portefeuille.

Habituellement les mandats de gestion pour ce type de fonds sont plus larges que les mandats de gestion traditionnels. Les différentes stratégies de fonds de couverture peuvent comporter des niveaux de risque différents. Certains fonds peuvent prendre une quantité de risque plus grande pour maximiser le rendement. Dans de tels cas l'effet de diversification pourrait être moins efficace. Il ne faut pas oublier la présence d'inefficiences dans les marchés financiers, principalement dans les titres de petites capitalisations qui n'ont pas une couverture par les analystes aussi importante que les titres de grandes capitalisations. De plus, les stratégies d'investissement utilisées par les fonds de couver-

ture ne sont pas toutes de même nature. Certaines stratégies sont moins bien corrélées avec les classes d'actifs traditionnelles alors d'autres stratégies peuvent présenter moins de volatilité. Certaines stratégies de fonds de couverture peuvent ne pas convenir à un portefeuille donné. De plus, les rendements des fonds de couverture ne sont pas tous de l'*alpha* pur, il se peut que se soit du *bêta* de quelque chose d'autre déguisée en *alpha*.

Il faut aussi savoir qu'investir dans un fonds de couverture peut aussi présenter certains défauts. En autres, les frais de gestion élevés caractérisent ce type d'investissement. Les stratégies sont souvent difficiles à comprendre et présentent peu de transparence. Beaucoup de fonds sont fermés, dans le sens qu'ils n'acceptent plus de nouveaux investisseurs, ce sont habituellement là les meilleurs.

4.2 Caractéristiques des fonds de couverture

Les fonds de couverture ont des caractéristiques qui les différencient des classes d'actifs traditionnelles. En autres, (a) ils peuvent prendre des positions longues et des positions à découvert dans les différents marchés, (b) ils peuvent facilement utiliser les instruments financiers dérivés transigés hors bourse, (c) ils peuvent aussi utiliser du levier (investir un montant plus élevé que la valeur des actifs sous gestion) et (d) ils peuvent aussi utiliser un éventail d'investissements simultanément dans plusieurs marchés. Avant d'investir dans un fonds de couverture une analyse de risque doit être entreprise. Par exemple, est-ce que les positions à découvert annulent les positions longues, comment le risque de ces positions se compare aux risques des marchés financiers. Les instruments dérivés sont-ils utilisés comme instruments de couverture ou comme instruments de spéculation? De quelle façon est-ce que le levier vient contribuer au risque total ou marginal du portefeuille?

À partir des données compilées nous constatons que les caractéristiques des fonds de couverture sont très différentes de celles des marchés financiers traditionnels. Au tableau 4.1 nous retrouvons les types de fonds de couverture que nous utiliserons dans

cette étude¹. Au tableau 4.2 nous retrouvons les quatre premiers moments de la distribution des rendements mensuels pour un échantillon de fonds de couverture comparé aux principaux indices boursiers.

TAB. 4.1 – *Types de fonds – Abréviations*

Global Macro	G-M
Distress	Dét
Equity Hedge	E-H
Equity Market Neutral	E-M-N
Event Driven	E-D
Convertible Arbitrage	C-A
Fund of Funds	F de F

On remarque que la moyenne mensuelle des rendements des fonds de couverture est plus élevée que celle des marchés boursiers traditionnels pour un écart type sensiblement le même. Les portefeuilles de fonds de couverture présentent moins d'asymétrie et beaucoup plus de aplatissement en moyenne que les indices boursiers. De plus, un aplatissement élevé indique que le fonds est fortement exposé aux événements extrêmes de marché.

Si par exemple nous prenons la moyenne des rendements mensuels de l'univers de 199 fonds de couverture à notre disposition et nous appliquons un test de normalité nous trouvons la représentation de *QQ plot* tel qu'illustrée à la figure 4.1, nous remarquons que les rendements s'éloignent de la normalité surtout dans les queues de la distribution.

Vu que les distributions des rendements des fonds de couverture ne suivent pas de lois normales nous ne pouvons pas utiliser le coefficient de corrélation linéaire pour

¹La source des données est la banque de données HFR de gestion de placement Innocap Inc, elle comporte 199 fonds de couverture. Les données peuvent s'échelonner de janvier 1981 jusqu'au 31 octobre 2007.

TAB. 4.2 – Quatre premiers moments des distributions des rendements

	STATISTIQUES MENSUELLES					
	Moyenne	Écart type	Asymétrie	Aplatissement	Minimum	Maximum
Pays						
Canada	0.0048	0.0251	-1.098	2.676	-0.107	0.0584
France	0.0037	0.0228	-0.543	1.047	-0.072	0.0618
Allemagne	0.0034	0.0285	-0.914	3.116	-0.121	0.0877
Japon	0.0003	0.0240	0.134	-0.276	-0.053	0.0670
UK	0.0025	0.0166	-0.375	0.193	-0.048	0.0416
ÉU	0.0026	0.0191	-0.625	0.760	-0.066	0.0410
Ptf Actions	0.0029	0.0190	-0.910	1.411	-0.065	0.0419
Moyenne	0.0029	0.0227	-0.570	1.253	-0.078	0.0596
Obligations	0.0052	0.0110	0.1880	0.103	-0.019	0.0373
Ptf Actions+Obl	0.0032	0.0165	-0.906	1.368	-0.058	0.0378
G-M	0.0100	0.0217	0.134	0.115	-0.044	0.0676
Dét.	0.0201	0.0398	-0.210	5.707	-0.157	0.2039
E-H	0.0116	0.0267	-0.110	1.630	-0.092	0.0888
E-M-N	0.0094	0.0199	0.066	1.102	-0.065	0.0630
E-D	0.0080	0.0225	-1.110	3.576	-0.101	0.0559
C-A	0.0050	0.0088	-0.582	2.056	-0.031	0.0288
F de F	0.0083	0.0162	-0.015	3.833	-0.064	0.0664
Moyenne	0.0104	0.0222	-0.261	2.574	-0.079	0.0821

Le portefeuille est une composition équilibrée des indices boursiers de chacun des pays.

La moyenne exclue le portefeuille.

Obligations : données mensuelles du DEX (anciennement le SMU)

Ptf Actions+Obl : moyenne équilibrée de chaque pays et des obligations

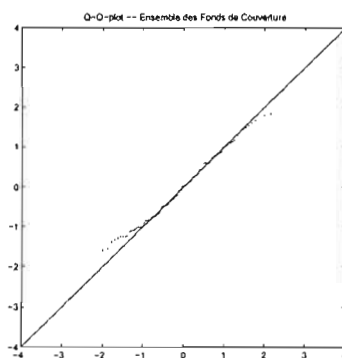


FIG. 4.1 – Représentation graphique de l'éloignement de la normalité pour les fonds de couverture.

estimer la dépendance entre différents fonds de couverture et les dépendances avec un portefeuille de marchés ou d'indices boursiers. Une mesure alternative doit être utilisée.

Dans ce contexte le τ de Kendall a été choisi. Comme nous l'avons exposé dans un chapitre précédent, le τ de Kendall est une mesure basée sur les rangs.

La matrice des τ de Kendall pour l'ensemble des fonds de couverture avec les principaux indices boursiers est présentée au tableau 4.3. Rappelons que τ de Kendall est une mesure robuste pour mesurer la force de dépendance entre des variables aléatoires. Pour fins de comparaisons nous retrouvons au tableau 4.4 les coefficients de corrélations linéaires mesurés par le rho de Pearson. La relation de correspondance théorique entre le τ de Kendall et le coefficient de corrélation linéaire ρ est donné par l'expression suivante :

$$\rho = \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau\right).$$

Plus que la corrélation entre deux actifs financiers est faible meilleure est la diversification. À titre d'exemple, en se référant aux tableaux 4.3 et 4.4 le tau de Kendall et le coefficient de corrélation linéaire entre le portefeuille "Ptf" et le fonds de fonds "F de F" sont respectivement de 0.502 et 0.627.

À l'annexe E nous avons calculé plusieurs copules empiriques à partir d'une moyenne pour un ensemble de fonds à vocations différentes. Ces fonds sont combinés avec un portefeuille traditionnel, combinés entre eux et finalement combinés avec un portefeuille obligataire. Même s'il s'agit de moyenne et non de fonds individuels on remarque qu'à partir de la copule empirique une information pertinente se dégage par rapport à la structure de dépendance et l'effet de diversification. Elle peut guider le gestionnaire dans le choix de fonds de couverture qui entreront dans la composition de son portefeuille. Afin d'illustrer ce choix nous avons calculé la probabilité que :

$$Prob = \mathbb{P}(U_1 < 0.20 \ U_2 < 0.20).$$

Nous avons pu ainsi ordonnancer les probabilités de quelques combinaisons de fonds soit avec un portefeuille indiciel, soit des fonds entre eux ou finalement des fonds de couverture combinés deux-à-deux. Les abréviations utilisées ce sont celles que nous retrouvons au tableau 4.1.

Au tableau 4.5 nous avons estimé l'effet de diversification apporté par l'ajout d'un fonds de couverture soit à un portefeuille diversifié ou soit à un autre fonds de couverture. Pour construire ce tableau nous avons utilisé les données compilées à l'annexe E. Par exemple si nous combinons le portefeuille diversifié avec un fonds de fonds, en examinant le tableau E.1 page 196 pour $U = 0.2$ et pour $V = 0.2$ nous trouvons la valeur 0.076 ce qui indique que 8% des observations se retrouvent dans la queue inférieure de la distribution avec une probabilité conjointe de 20%. Ainsi, cette observation se retrouve dans la catégorie 8 du tableau 4.5. Cette méthodologie, basée sur les copules empiriques, nous permet de juger l'effet de diversification par l'ajout de nouvelles composantes à un portefeuille existant. Nous remarquons aussi, que nous avons un bon effet de diversification en combinant un fonds de fonds (F de F) à un portefeuille obligataire, seulement 4% des observations se retrouvent dans la queue inférieure de la distribution conjointe. Alors que 15% des observations se trouvent dans la queue inférieure de la distribution conjointe pour la combinaison d'un fonds *equity hedge* (E-H) avec un fonds de fonds.

TAB. 4.3 - *Tau de Kendall*

	DONNÉES MENSUELLES								
	Cnd	Frnc	Alm	Jpn	UK	ÉU	PtfA	DEX	A+O
Pays									
Canada	1.000								
France	0.464	1.000							
Allmgn	0.453	0.707	1.000						
Japon	0.365	0.271	0.232	1.000					
UK	0.465	0.593	0.565	0.331	1.000				
ÉU	0.548	0.512	0.531	0.333	0.515	1.000			
Ptf Act	0.659	0.696	0.676	0.472	0.670	0.673	1.000		
DEX	0.046	-0.007	0.062	0.076	0.017	0.041	0.041	1.000	
A+OBL	0.667	0.689	0.657	0.470	0.669	0.668	0.037	0.102	1.000
Fonds									
G-M	0.380	0.308	0.325	0.231	0.279	0.266	0.357	0.133	0.371
Dét.	0.241	0.245	0.254	0.182	0.228	0.208	0.287	0.105	0.300
E-H	0.605	0.482	0.511	0.333	0.440	0.528	0.611	0.043	0.676
E-M-N	0.549	0.453	0.454	0.392	0.419	0.498	0.578	0.079	0.584
E-D	0.512	0.488	0.498	0.280	0.421	0.509	0.551	0.035	0.548
C-A	0.221	0.175	0.144	0.106	0.148	0.180	0.211	0.107	0.221
F de F	0.511	0.406	0.414	0.319	0.394	0.390	0.502	0.096	0.507
	G-M	Dét.	E-H	E-M-N	E-D	C-A	F de F		
G-M	1.000								
Dét.	0.214	1.000							
E-H	0.423	0.315	1.000						
E-M-N	0.421	0.291	0.780	1.000					
E-D	0.366	0.332	0.660	0.569	1.000				
C-A	0.185	0.227	0.318	0.286	0.318	1.000			
F de F	0.538	0.346	0.659	0.608	0.562	0.361	1.000		

TAB. 4.4 – Coefficient de corrélation linéaire

	DONNÉES MENSUELLES						
	Canada	France	Allemagne	Japon	UK	ÉU	Ptf
Pays							
Canada	1.000						
France	0.701	1.000					
Allemagne	0.670	0.910	1.000				
Japon	0.534	0.395	0.351	1.000			
UK	0.652	0.806	0.768	0.448	1.000		
ÉU	0.777	0.730	0.747	0.454	0.744	1.000	
Ptf	0.865	0.905	0.890	0.636	0.862	0.875	1.000
Fonds							
G-M	0.532	0.437	0.482	0.319	0.405	0.385	0.516
Dét.	0.335	0.280	0.311	0.198	0.262	0.271	0.333
E-H	0.779	0.661	0.683	0.466	0.589	0.678	0.772
E-M-N	0.729	0.608	0.596	0.522	0.560	0.651	0.731
E-D	0.756	0.666	0.678	0.410	0.606	0.716	0.764
C-A	0.401	0.307	0.269	0.182	0.234	0.309	0.341
F de F	0.673	0.543	0.561	0.356	0.477	0.512	0.627
	G-M	Dét.	E-H	E-M-N	E-D	C-A	F de F
G-M	1.000						
Dét.	0.229	1.000					
E-H	0.608	0.379	1.000				
E-M-N	0.599	0.362	0.939	1.000			
E-D	0.500	0.432	0.830	0.748	1.000		
C-A	0.341	0.386	0.555	0.518	0.540	1.000	
F de F	0.731	0.404	0.857	0.818	0.714	0.580	1.000

TAB. 4.5 – Probabilités de trouver 20% des observations communes dans la queue inférieure d'une combinaison de fonds.

$\mathbb{P}(\%)$	Combinaison	
15	E-H	F de F
14		
	E-H	E-D
13	E-M-N	F de F
	E-M-N	E-D
	Ptf	E-H
	Ptf	E-M-N
12	Ptf	E-D
	E-H	F de F
	E-D	F de F
11		
10	G-M	F de F
9	Ptf	G-M
	Ptf	Dét
	G-M	E-H
8	G-M	E-M-N
	E-D	C-A
	Obl	E-D
	Ptf	F de F
	Obl	E-M-N
7	E-M-N	C-A
	C-A	E-H
	G-M	E-D
6	E-H	C-A
	Obl	Dét
	Obl	E-H
	G-M	C-A
5	Obl	G-M
	Ptf	C-A
4	G-M	Dét
	Obl	C-A
	Obl	F de F

4.3 Choix d'un fonds de couverture

Le choix d'un fonds de couverture ne doit pas être basé uniquement sur les rendements historiques. Il est connu que les rendements historiques ne sont pas garants des rendements futurs. Avant d'investir dans un fonds de couverture une analyse de risque doit être entreprise. Il existe différents types de fonds de couverture avec différents niveaux de risque qui caractérisent chacun. Par exemple un investissement dans un fonds *Equity-Hedge* pour un investisseur en actions aura tendance à augmenter l'exposition du risque de cette classe d'actifs ; dû à la forte corrélation entre le fonds *Equity-Hedge* et le portefeuille de titres réguliers, un tau de Kendall de 0.611 comme le témoigne le tableau 4.3. Les effets de diversification seront moins importants qu'un investissement dans un fonds *Convertible-Arbitrage* ou *Distress*.

Habituellement une caisse de retraite ou un gestionnaire d'actifs aura tendance à utiliser un nombre limité de fonds de couverture. On s'attend, en général à retrouver rarement plus de 10 % de l'actif sous gestion en placements alternatifs dont fait habituellement parti les fonds de couverture. Cela peut représenter : trois, quatre ou cinq fonds de couverture différents. Le but visé par le gestionnaire de portefeuille pour investir dans un fonds de couverture est d'une part la diversification par rapport aux indices de marché et d'autre part la recherche du rendement absolu.

4.4 Mesure de la valeur à risque d'un portefeuille composé de fonds de couverture

Dans un premier temps nous allons mesurer l'impact d'ajouter plusieurs fonds de couverture à un portefeuille composé d'actifs diversifiés. Dans un deuxième temps, la dépendance sera mesurée avec l'aide de copules. Nous supposons en premier lieu, qu'une caisse de retraite, afin de diversifier son portefeuille d'actifs, utilise un fonds de couverture combiné à une gestion indicelle. Par exemple six indices de marché peuvent représenter le portefeuille de référence. Un gestionnaire de fonds a une politique de placement à respecter, il a aussi une certaine marge de manœuvre autour de sa politique

de placement. La question principale qui se pose est : est-ce qu'ajouter un fonds de couverture peut avoir un effet positif sur la diversification du portefeuille? Dans cette optique nous allons mesurer l'impact de l'ajout de fonds de couverture à un portefeuille traditionnel de marché. Nous sommes aussi intéressés à connaître la probabilité que si un portefeuille diversifié obtient un rendement de -5% ou moins un mois donné, que le portefeuille de fonds de couverture ait aussi un rendement de -5% ou moins ce mois là, ce qui se traduit par l'expression suivante :

$$\mathbb{P}[R_P \leq -0.05, R_{HF} \leq -0.05], \quad (4.1)$$

où R_P et R_{HF} sont les rendements du portefeuille et de l'ensemble des fonds de couverture choisis. Nous remarquons de plus, que l'équation (4.1) découle de la définition d'une copule.

1. Afin de juger de la pertinence d'ajouter un ou plusieurs fonds de couverture à un portefeuille diversifié, nous calculons la VaR (Valeur à Risque) d'un portefeuille indiciel ainsi que la VaR d'une combinaison de fonds de couvertures, de 1 à 20 fonds, à partir des données historiques. C'est habituellement là, l'une des premières étapes du processus décisionnel de la part du gestionnaire.

Pour construire l'échantillon nous avons utilisé un éventail de fonds choisis à partir du tableau 4.1.

Pour mesurer la VaR, les rendements mensuels, du portefeuille de la politique de placement et du portefeuille de fonds de couverture, ont été classés par ordre croissant, du pire rendement mensuel au meilleur rendement mensuel. La VaR de l'ensemble des fonds de couverture choisis est ensuite comparée à la VaR de la politique de placement. La VaR a été établie de deux façons différentes (a) un niveau de VaR fixé à -5% de rendement pour un mois donné et (b) un niveau de VaR fixée au 5^e pire rendement mensuel ou pire cas.

Pour les deux cas nous avons ensuite calculé le nombre de fois sur 100 que la VaR de la combinaison de fonds de couverture, de 1 fonds à 20 fonds, est inférieure

à celle du portefeuille diversifié. Pour cet exercice nous avons simulé 100 choix de combinaisons de fonds de couverture, nous avons répété l'exercice 10 fois et pris la moyenne des résultats obtenus pour chacune des 100 simulations. Dans un premier temps nous avons choisi les fonds au hasard sans tenir compte de leur spécialisation.

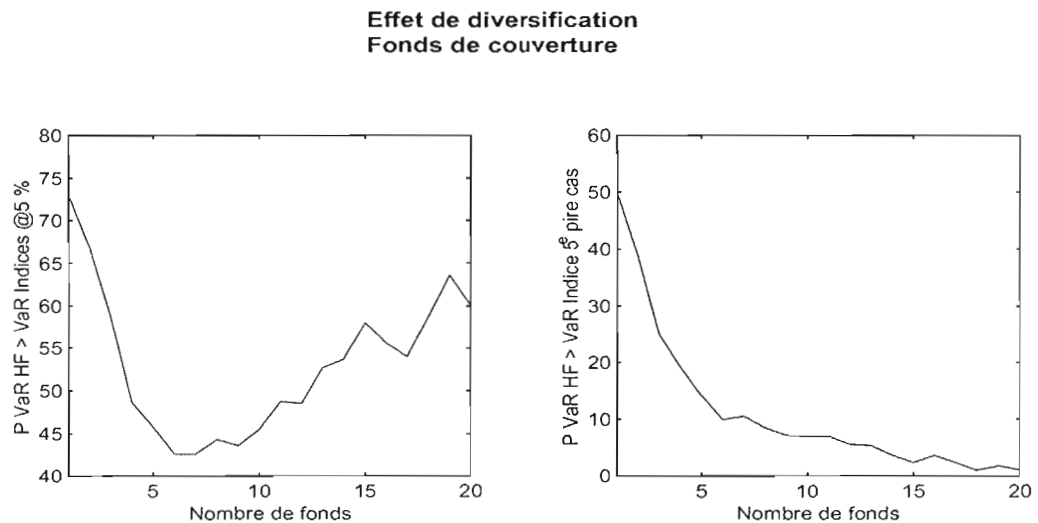


FIG. 4.2 – Effet de diversification pour 1 à 20 fonds (axe horizontal) : graphique de gauche le nombre de fois sur 100 que la VaR à 5% est plus grande pour une sélection de fonds de couverture par rapport à un portefeuille indiciel, le graphique de droite est pour le 5e pire cas.

Ces choix pourraient s'apparenter à une gestion de fonds de fonds. Un gestionnaire de fonds de fonds a en général de 15 à 20 fonds dans son portefeuille de fonds. Cette analyse montre les avantages de la diversification par l'ajout de fonds de couverture. Au côté gauche du graphique de la figure 4.2, l'axe horizontal représente le nombre de fonds et l'axe vertical le nombre de fois sur cent que la VaR de la combinaison de fonds excède celle d'un portefeuille diversifié à un niveau de 5%. Nous avons aussi répété l'exercice pour une valeur à risque établie au cinquième pire cas.

La partie droite de la figure 4.2 montre la probabilité ou le nombre de fois sur 100

que le cinquième pire cas du portefeuille de fonds de couverture offre un rendement inférieur au cinquième pire cas du portefeuille indiciel, une valeur à risque plus importante pour le portefeuille de fonds de couverture.

Nous remarquons de plus que l'effet de diversification commence à s'estomper après l'ajout d'un sixième fonds de couverture, du moins en calculant la VaR à 5%.

Si nous choisissons au hasard les fonds de couverture, mais cette fois-ci, tous avec des spécialisations différentes, nous obtenons des résultats sensiblement similaires aux fonds choisis au hasard. Nous pouvons observer les résultats de ces simulations à la figure 4.3.

Comparaison de la VaR

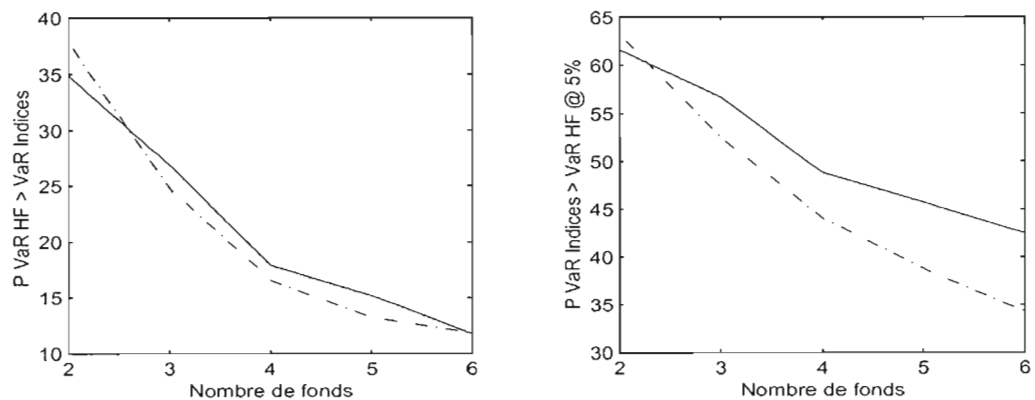


FIG. 4.3 – Effet de diversification pour 1 à 6 fonds, comparaison entre les fonds choisis au hasard et les fonds avec des fonctions distinctes, la ligne pointillée représente le choix des fonds de couverture de nature différente.

2. La première analyse ne tient pas compte de la structure de dépendance qui existe entre les fonds de couverture et le portefeuille diversifié. Dans ce cas-ci nous avons examiné, par le biais des copules, la dépendance possible entre le portefeuille diversifié et l'ajout de fonds de couverture. Nous ne faisons aucune hypothèse par rapport à la distribution conjointe. Nous utilisons simplement la copule empirique

pour mesurer la force de dépendance entre le portefeuille diversifié et l'ajout de fonds de couverture.

À la figure 4.4 nous observons la structure de dépendance entre un portefeuille diversifié et un fonds de couverture, la figure 4.6 est la structure de dépendance avec dix fonds. On remarque qu'avec l'ajout de dix fonds on obtient un effet de diversification moins important qu'avec l'ajout d'un seul fonds.

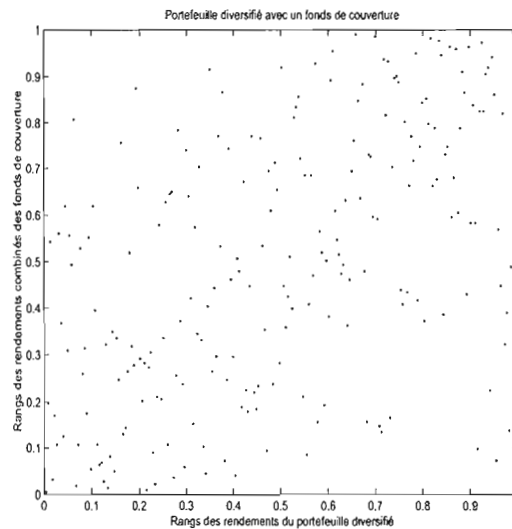


FIG. 4.4 – Représentation de la structure de dépendance entre un portefeuille diversifié avec 1 fonds de couverture.

La copule empirique générée de la combinaison d'un seul fonds de couverture et le portefeuille diversifié est présentée au tableau 4.6. Ce tableau est construit en choisissant un fonds de couverture au hasard et en le combinant avec le portefeuille diversifié. En produisant la copule empirique nous devons bien faire attention que les dates coïncident à la fois pour le fonds de couverture et le portefeuille diversifié. Chaque fonds de couverture est tiré de la banque de données HFR d'Innocap inc.

La figure 4.5 représente graphiquement la fonction de densité de la copule empirique pour une simulation. On remarque une forte concentration d'observations dans les queues des distributions.

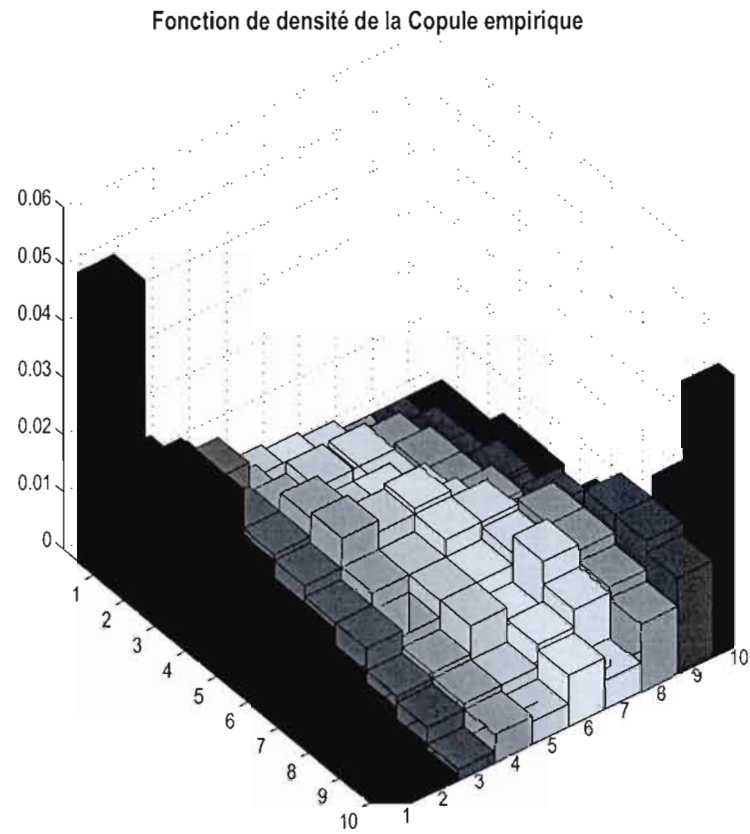


FIG. 4.5 – Représentation de la fonction de densité conjointe avec un fonds de couverture et un portefeuille diversifié.

TAB. 4.6 – *Combinaison d'un fonds choisi au hasard avec un portefeuille diversifié*

$$C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq \mathbf{u}_1, U_2 \leq \mathbf{u}_2] \text{ nobs} = 222$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.018	0.045	0.068	0.077	0.086	0.090	0.090	0.090	0.090	0.099
0.2	0.045	0.086	0.113	0.131	0.153	0.167	0.171	0.185	0.185	0.198
0.3	0.050	0.104	0.167	0.198	0.248	0.266	0.270	0.284	0.284	0.302
0.4	0.063	0.140	0.216	0.257	0.311	0.333	0.347	0.360	0.369	0.396
0.5	0.068	0.144	0.221	0.279	0.342	0.387	0.419	0.450	0.464	0.500
0.6	0.090	0.171	0.252	0.320	0.392	0.455	0.500	0.536	0.554	0.604
0.7	0.099	0.185	0.279	0.351	0.441	0.514	0.577	0.617	0.653	0.703
0.8	0.099	0.189	0.288	0.378	0.482	0.559	0.635	0.694	0.748	0.797
0.9	0.104	0.198	0.297	0.392	0.495	0.586	0.676	0.748	0.820	0.896
1.0	0.104	0.198	0.297	0.396	0.500	0.599	0.698	0.797	0.896	1.000

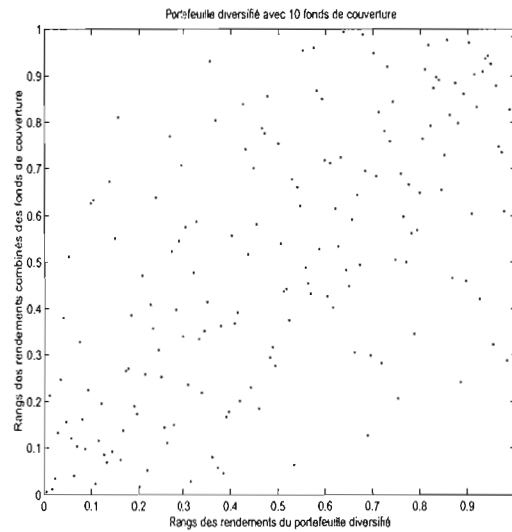


FIG. 4.6 – Représentation de la structure de dépendance entre un portefeuille diversifié avec 10 fonds de couverture.

TAB. 4.7 – *Combinaison de 10 fonds choisi au hasard avec un portefeuille diversifié*

$$C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq \mathbf{u}_1, U_2 \leq \mathbf{u}_2] \text{ nobs} = 169$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.030	0.065	0.071	0.077	0.083	0.083	0.089	0.089	0.089	0.095
0.2	0.041	0.089	0.112	0.136	0.154	0.154	0.172	0.183	0.183	0.195
0.3	0.047	0.101	0.142	0.183	0.213	0.219	0.249	0.272	0.284	0.296
0.4	0.065	0.130	0.183	0.237	0.296	0.320	0.349	0.373	0.385	0.396
0.5	0.077	0.154	0.231	0.314	0.373	0.402	0.438	0.467	0.479	0.497
0.6	0.101	0.178	0.266	0.349	0.420	0.467	0.515	0.544	0.574	0.598
0.7	0.101	0.183	0.272	0.361	0.450	0.497	0.562	0.627	0.675	0.698
0.8	0.101	0.189	0.278	0.367	0.462	0.527	0.598	0.680	0.746	0.799
0.9	0.101	0.189	0.284	0.379	0.479	0.562	0.645	0.740	0.817	0.899
1.0	0.101	0.195	0.296	0.396	0.497	0.598	0.698	0.799	0.899	1.000

4.5 Dépendance d'un fonds de couverture avec un portefeuille de marché

Dans cette section nous allons étudier la dépendance qui existe entre un fonds de couverture et un portefeuille de marché. Pour ce faire nous aurons recours aux copules. Nous allons simuler l'ajout d'un fonds de couverture à un portefeuille de marché indiciel. Afin d'obtenir les résultats les plus réalistes possibles nous allons choisir au hasard de 1 à 5 fonds que nous combinons à un portefeuille de marché. Le portefeuille de marché est créé à partir des six indices de marché boursier principaux : le Canada, la France, l'Angleterre, l'Allemagne le Japon et les États-Unis. Le portefeuille est équilibré dans chacun de ces six indices de marché. Nous avons à notre disposition les données mensuelles sur près de 200 fonds de couverture différents. À partir de ces fonds, nous allons faire une sélection aléatoire d'un ensemble de fonds, de un à cinq. Nous croyons que si une caisse de retraite choisit une répartition d'actifs de 10% dans cette classe d'actifs 2% d'investissement par fonds semble un minimum d'investissement dans un seul fonds. La caisse pourrait aussi choisir d'investir jusqu'à 10% dans cette classe d'actifs nous semble aussi un maximum.

Nous utilisons la méthodologie suivante pour les simulations des rendements de un à plusieurs fonds de couverture et le portefeuille diversifié de marché.

1. Nous combinons ensemble les fonds choisis, de un à cinq en un seul portefeuille. Nous obtenons ainsi une série chronologique de rendements mensuels pour les dates communes à partir des données disponibles,
2. Pour les dates communes nous créons un portefeuille de marché composé des six indices énumérés plus haut,
3. Nous obtenons ainsi une deuxième série chronologique de rendements mensuels,
4. Pour chaque série chronologique obtenue nous estimons les paramètres $GARCH(1, 1)$, tel que décrit plus bas,
5. Nous simulons ensuite des portefeuilles composés de fonds de couverture avec un poids de 10% et du portefeuille diversifié avec un poids de 90%,

- (a) Pour les simulations des marges pour chaque série chronologique nous simulons des innovations à partir du modèle GARCH(1,1).
- (b) Pour la fonction de dépendance entre chaque partie du portefeuille : nous procédons à des tirs aléatoires de fonctions copules, le tau de Kendall est estimé à partir des données initiales pour les dates communes,
- (c) Quatre fonctions copules ont été utilisées, il s'agit de la copule gaussienne, la copule de Clayton, la copule de Gumbel et la copule de Frank.

4.5.1 Paramètres GARCH(1,1)

Le modèle GARCH(1,1) requiert l'estimation de quatre paramètres (μ_i , ω , α et β). Selon Box & Jenkins (6), moins que nous avons de paramètres à estimer, meilleur devrait être le modèle. Typiquement nous vérifions l'autocorrélation dans la série des rendements et ensuite appliquons le modèle GARCH proprement dit :

$$h_t = \omega + \beta \times h_{t-1} + \alpha \times \epsilon_{t-1}, \quad (4.2)$$

$$\epsilon_t = \epsilon_t \times \sqrt{h_t}, \quad (4.3)$$

$$r_t = \mu + \epsilon_t, \quad (4.4)$$

La valeur de départ des simulations sont données par :

$$h_0 = \sigma^2, \quad (4.5)$$

$$\epsilon_t = \epsilon_t \times \sqrt{h_t}. \quad (4.6)$$

σ^2 est la variance non conditionnelle des rendements, la fonction de dépendance nous est transmise par des tirs aléatoires de la fonction copule choisie, ces valeurs nous sont fournies par la variable ϵ_t dans le modèle à plusieurs variables.

Note 1 *Les données des rendements ont été vérifiées pour l'autocorrélation. Le test-Q de Ljung-Box-Pierce a été utilisé. Il n'a pas de corrélation significative présente dans les données brutes pour des lags jusqu'à 10, 15 et 20 périodes, à un niveau de confiance de 95.0%. À titre d'exemple les résultats de ces tests pour un échantillon de fonds sont présentés au tableau suivant :*

TAB. 4.8 – Test Q

Lags	H	p-value	t	χ^2
10	0	0.1235	15.2428	18.3070
15	0	0.1515	20.5602	24.9958
20	0	0.3588	21.6678	31.4104

Une valeur H est une variable booléenne, une valeur $H = 0$ indique qu'il n'y a pas d'autocorrélation significative dans les données, alors que $H = 1$ indique une présence significative d'autocorrélation dans la série chronologique. Nous pouvons voir la représentation graphique de l'autocorrélation dans les séries chronologiques : les figures 4.7 et 4.8 pour la fonction d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle dans une des simulations typiques.

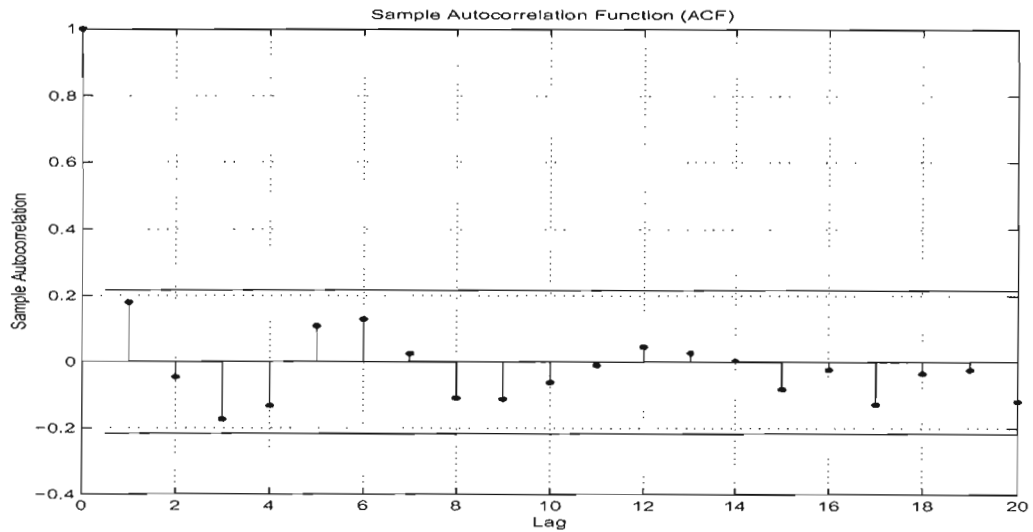


FIG. 4.7 – Fonction d'autocorrélation dans une série chronologique d'un portefeuille composé de fonds de couverture.

Après avoir estimé les paramètres GARCH, nous avons inspecté la relation entre les innovations (c'est-à-dire les résidus) dérivés à partir du modèle de l'écart type conditionnel (sigma) correspondante et les rendements observés. À la figure 4.9 et 4.10 nous

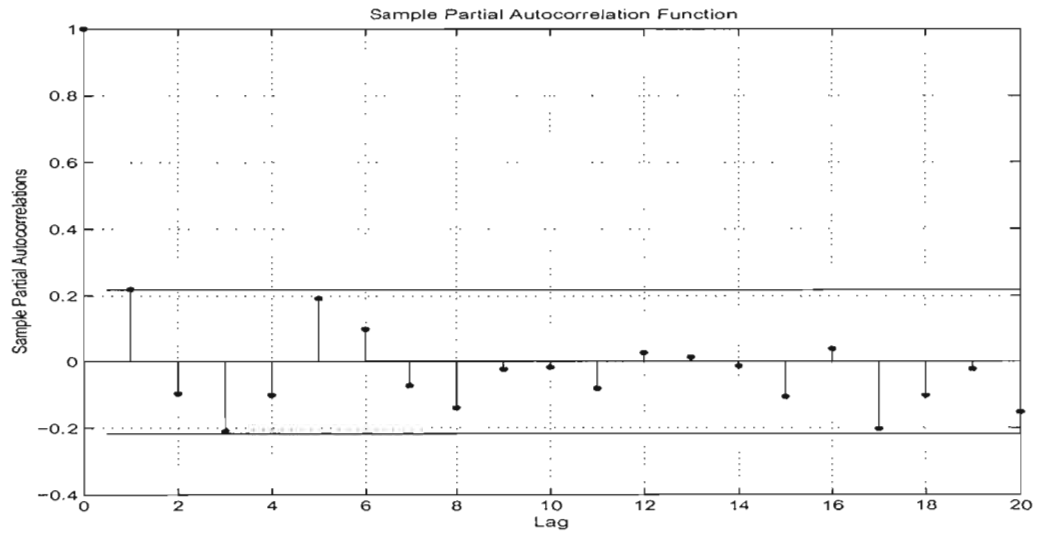


FIG. 4.8 – Fonction d'autocorrélation partielle dans une série chronologique d'un portefeuille composé de fonds de couverture.

pouvons voir la relation entre les innovations, l'écart type conditionnel et les rendements observés pour une simulation avec un fonds de couverture et cinq fonds de couverture.

À la figure 4.11 nous pouvons observer les mêmes relations pour les résultats du modèle GARCH qui simule les innovations de la partie du portefeuille diversifié.

4.5.2 Interprétation des résultats

Un investisseur qui choisi la classe d'actifs *placements alternatifs* est souvent tenté par l'ajout de plusieurs fonds de couverture à son portefeuille. À la lumière des résultats obtenus nous pouvons voir qu'ajouter plusieurs fonds de couvertures différents n'apportent pas un avantage important par rapport à investir uniquement dans un portefeuille diversifié avec un ou deux fonds de couverture. Afin d'illustrer l'effet de diversification sur le rendement mensuel à la figure 4.12 nous pouvons observer l'impact de l'ajout de plusieurs fonds de couverture à un même portefeuille. La ligne pleine représente le rendement mensuel simulé pour un à cinq fonds alors que la ligne pointillée représente

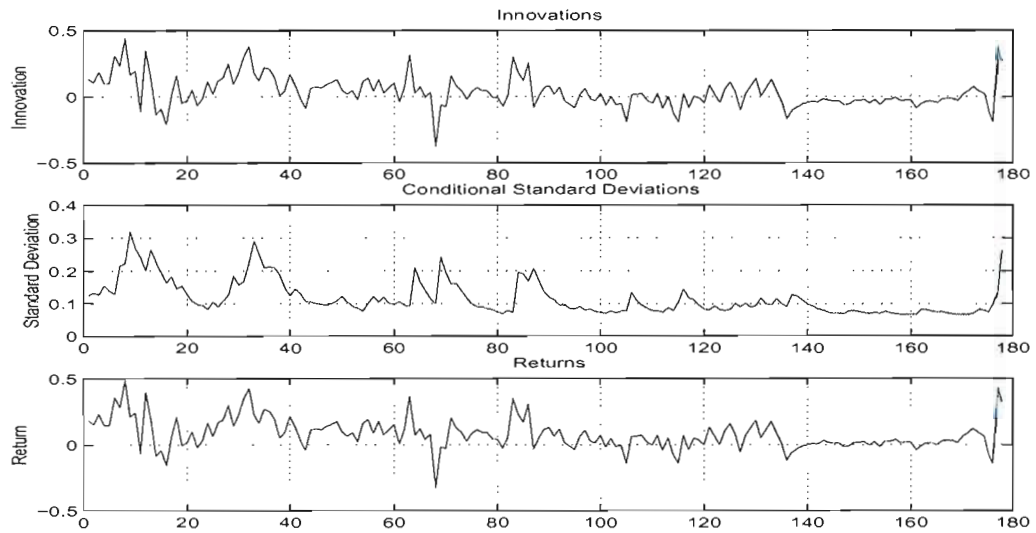


FIG. 4.9 – Relation entre les résidus dérivés du modèle, le sigma et les rendements observés pour une simulation comprenant un fonds.

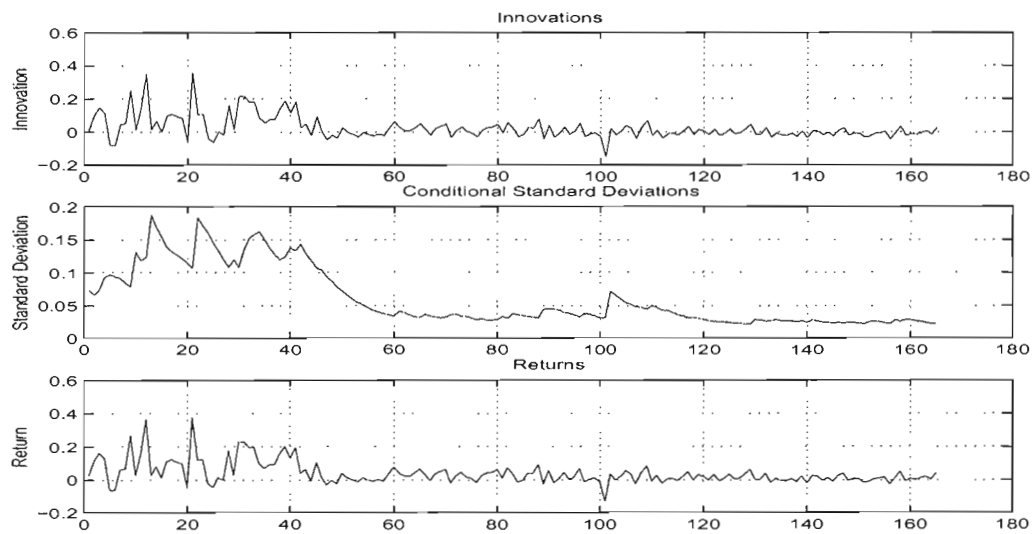


FIG. 4.10 – Relation entre les résidus dérivés du modèle, le sigma et les rendements observés pour une simulation comprenant cinq fonds.

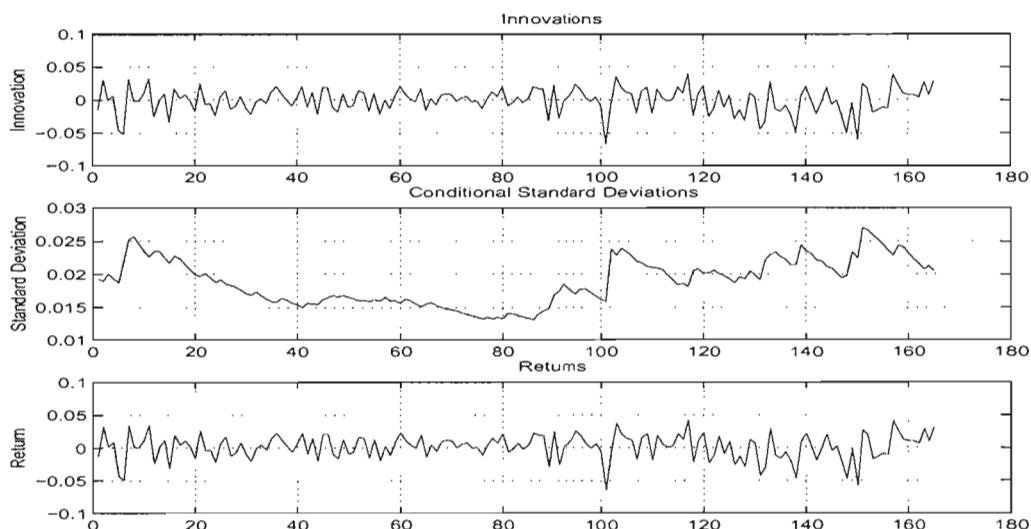


FIG. 4.11 – Relation entre les résidus dérivés du modèle, le sigma et les rendements observés pour une simulation comprenant le portefeuille diversifié de six indices boursiers.

le rendement combiné de 90% de la combinaison d'un portefeuille indiciel composé de six indices de marché et 10% d'investissement dans un à cinq fonds de couverture. Nous pouvons mentionner que pour ces simulations les fonds sont choisis au hasard et que seulement les données pour dates communes sont utilisées pour estimer les paramètres GARCH. On peut voir que l'avantage du rendement de l'ajout de fonds de couverture s'estompe vite par l'ajout de plusieurs fonds. Cependant, comme nous l'avons vu à la section 4.4, le risque diminue aussi par l'ajout de nouveaux fonds. La diminution de risque se fait au détriment du rendement anticipé.

À titre d'exemple au tableau 4.9 on retrouve les résultats d'une simulation de la valeur à risque d'un portefeuille diversifié avec 90% dans des indices de marché et 10% dans des fonds de couverture. Les valeurs à risque sont simulées pour des horizons s'échelonnant sur une période de six mois à cinq ans. À l'annexe F nous retrouvons les résultats pour 10 simulations avec l'utilisation de la copule gaussienne, de Clayton, de Gumbel et de Frank. Les simulations sont respectivement pour l'ajout à un portefeuille

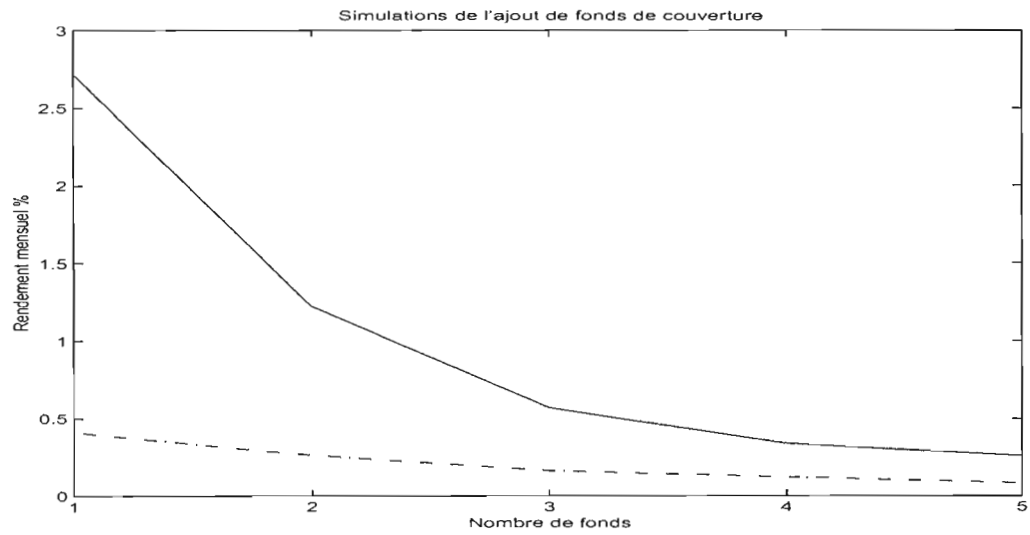


FIG. 4.12 - Impact sur le rendement mensuel de l'ajout de fonds de couverture à un portefeuille diversifié.

diversifié, d'un fonds à cinq fonds de couverture.

TAB. 4.9 – Valeurs à risque simulées d'un portefeuille composé de 10% de fonds de couverture et 90% d'un portefeuille diversifié.

	F C.	Ind.	Ptf.
1 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	1.613	0.392	0.514
Clayton	1.542	0.273	0.400
Gumbel	1.538	0.425	0.537
Frank	1.463	0.348	0.460
1 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	1.463	0.234	0.357
Clayton	1.506	0.303	0.423
Gumbel	1.467	0.332	0.445
Frank	1.580	0.370	0.491
1 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	1.488	0.290	0.410
Clayton	1.583	0.332	0.457
Gumbel	1.571	0.289	0.417
Frank	1.568	0.348	0.470
1 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	1.519	0.288	0.411
Clayton	1.593	0.344	0.469
Gumbel	1.592	0.307	0.436
Frank	1.536	0.339	0.459
1 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	1.533	0.326	0.447
Clayton	1.569	0.353	0.474
Gumbel	1.583	0.341	0.465
Frank	1.587	0.407	0.525

Chapitre V

CONSEILS À UNE CAISSE DE RETRAITE POUR LA GESTION DE SES RISQUES DE MARCHÉ

5.1 Les risques d'une caisse de retraite

Dans ce chapitre nous examinons les risques auxquels une caisse de retraite typique est exposée. Nous traitons principalement des risques de marchés. Nous voyons aussi comment la théorie financière moderne peut aider la compréhension de ces risques et ensuite aider à leurs gestions.

L'un des outils de gestion des risques des plus utilisés est la diversification de portefeuille. Les bénéfices de la diversification ont été analysés à fond avec l'avènement de la théorie moderne de portefeuille développée par Markowitz (1952). Le modèle d'optimisation proposé par Markowitz couvre un horizon d'investissement d'une période, cela se prête plus ou moins bien pour une caisse de retraite. En fait elles ont habituellement des horizons d'investissement beaucoup plus longs.

Depuis la dernière décennie nous avons vécu des périodes pendant lesquelles les bénéfices de la diversification n'étaient pas au rendez-vous. Mentionnons 1998, la crise asiatique avec la débâcle de LTCM, 2001-2002 l'éclatement de la bulle technologique et plus récemment 2008, la crise de liquidité qui a eu pour effet de paralyser les marchés financiers à la grandeur de la planète. De plus en plus, les marchés boursiers à travers le monde se comportent comme un seul grand marché, du moins lors de fortes baisses des marchés. Dans les périodes dites normales, les différents marchés locaux répondent

aux variables économiques propres à chacun de pays. Un gestionnaire de portefeuille est fortement intéressé à connaître quelles seront les pertes potentielles que son portefeuille pourra subir lors de récessions ou de marchés baissiers. Depuis les cent dernières années, il y a eu 54 baisses de plus de 10 %, soit environ une à tous les deux ans. De ces 54 baisses, il y en a eu 14 de plus de 25 % soit environ à tous les six ans.

Il n'y a cependant pas que les risques de marchés qui peuvent affecter une caisse de retraite, il y a aussi les risques liés à son financement. Par exemple les prestations doivent provenir à la fois des cotisations et une grande partie des rendements obtenus par les investissements. Comme l'illustre le tableau 5.1, en moyenne le rendement réel octroyé par le marché des actions, sur une longue période, est près de 7 % (après l'inflation). Si une année le rendement est de l'ordre de -15 % à -20 % comme ce fût le cas en 2008 cela met beaucoup de pression sur la structure financière d'un régime de retraite. De plus, un levier financier important est créé lorsque les membres à la retraite tirent une rente du régime, les prestations qui doivent leur être payées deviennent de l'endettement pour le régime de retraite. Ce levier devient un élément important de risque lorsque les rendements ne sont pas au rendez-vous.

TAB. 5.1 – *Rendements historiques du marché américain, données compilées par Jeremy Seigel.*

Rendements historiques des actions depuis 200 ans					
Période		Rendement		Rendement	Rendement
		Total %	Inflation %	Réel %	Total Or %
Agraire	1802-1870	7.1	0.1	7.0	0.2
Manufacturière	1871-1925	7.2	0.6	6.6	-0.8
Industrielle	1926-2001	10.2	3.1	6.9	0.4
Total 200 ans	1802-2001	8.3	1.4	6.9	0.0

Source : Stocks for the Long Run, 3rd edition, Jeremy Seigel

5.2 Diversification dans des classes d'actifs différentes

La diversification semble nous promettre un refuge contre les mauvais rendements d'un marché à une année donnée. La globalisation des marchés a détruit, en grande partie les bénéfices de cette diversification.

Dans des périodes de marchés baissiers ou d'instabilité financière, les corrélations ont tendance à se rapprocher les unes des autres. Dans un tel contexte la gestion des risques doit passer dans un premier temps par une répartition des actifs qui ne sont pas de même nature ou dans des classes d'actifs qui ne dépendent pas des mêmes variables économiques. Par exemple un portefeuille composé d'une partie d'actions et une partie d'obligations ; les actions assurent la croissance du capital à long terme et protègent le pouvoir d'achat, alors que les obligations, pour leur part, protègent le capital mais n'offrent pas la croissance comme le font les titres d'actions. À notre avis, la partie du portefeuille investie en obligations ne devrait pas contenir des titres de corporations car ceux-ci dépendent en grande partie des mêmes variables économiques et financières que les titres d'actions. Rappelons que les dirigeants d'entreprises ont un devoir envers leurs actionnaires et non pas envers leurs créanciers. Si vous *aimez* une compagnie les perspectives de gains seront bien meilleures avec des titres d'actions qu'avec des titres d'obligations.

Rappelons toutefois, qu'en général, les caisses de retraite sont des investisseurs à long terme. En conséquence, elles ont une capacité plus importante à prendre des risques que les investisseurs privés.

5.3 Mesures de dépendance

Comme nous l'avons montré à la section 2.2.4 les coefficients de corrélations linéaires contiennent plusieurs carences qui limitent leurs utilisations en gestion des risques financiers. Par exemple, calculer les risques d'un portefeuille à l'aide des coefficients de corrélations linéaires peut donner un sentiment de fausse confiance. Il existe plusieurs méthodes alternatives pour mesurer la dépendance, entre autres : les coefficients de cor-

relation de rangs, tels le tau de Kendall ou le rho de Spearman. Nous avons vu aussi que les mesures de corrélations ne sont pas constantes dans le temps. En période de marchés baissiers les corrélations ont tendance à augmenter et le contraire en période de croissance économique. Il serait souhaitable de trouver une mesure de dépendance qui demeure constante indépendamment de la nature du marché. La théorie des copules permet d'atteindre cet objectif. En effet, une copule est une mesure de probabilité conjointe : par exemple, *quelle est la probabilité que si un marché a un rendement inférieur à -10%, que le rendement d'un autre marché soit aussi inférieur à -10% ?* Cette question découle de la définition d'une copule. En conséquence, un gestionnaire de portefeuille peut mieux apprécier l'effet de diversification de son portefeuille et aussi les risques qu'il encourt, surtout s'il craint à une baisse importante des marchés.

Dans la gestion des actifs, il faut toujours se méfier de l'application aveugle d'une formule mathématique qui semble prometteuse. Les modèles mathématiques sont des aides précieuses à la décision d'investissement. Ils ne peuvent pas remplacer le jugement et l'analyse fondamentale. Il faut toujours comprendre la nature de nos investissements, c'est une règle d'or. L'application des copules ne fait pas exception à cette règle. Il s'agit-là d'un outil qui remplace avantageusement l'utilisation des coefficients de corrélations linéaires. Les *quants* à Wall Street, ont appliqué la théorie des copules gaussiennes dans la titrisation des actifs bancaires. Dans cette foulée ils ont créé des instruments financiers tels les *Credit Default Swap* CDS et *Collateralized Debt Obligation* CDO, ces montages financiers se sont vu accordé des cotes de crédit triple A alors que chacune des parties de ces montages n'avaient cette cote. À titre d'exemple, à la fin de 2001 il y avait 920 \$ milliards de CDS et de CDO en circulation. À la fin de 2007 ce montant excédait 62 \$ billions. Selon Darrell Duffie, l'évaluation des CDO reposait presque uniquement sur l'utilisation du modèle de copules gaussiennes.

5.4 Valeur à Risque (VaR) d'un portefeuille

Comme nous le savons la valeur à risque d'un portefeuille ne dépend pas uniquement des poids et de la volatilité de chaque actif qui le compose, mais aussi des

corrélations qui existent entre chacune de ses composantes. Comme nous l'avons vu les coefficients de corrélation ne sont pas constants dans le temps. Pour tenir compte de cet état de chose nous pouvons utiliser les modèles DCC *Dynamic Correlation Coefficients* voir (7). Les modèles DCC sont aux corrélations ce que les modèles ARCH sont aux volatilités. Les méthodes de calcul de la valeur à risque ont beaucoup évolué au cours des dix dernières années. Un deuxième élément est l'évolution du risque de crédit l'outil de mesure de risque dans ce domaine, repose souvent sur la théorie des copules.

5.5 Utilisation de fonds de couverture

Les caisses de retraite utilisent les fonds de couverture pour fin de diversification. Il faut faire attention à la façon dont les portefeuilles sont diversifiés. Les gestionnaires de portefeuilles ont tendance à rester près des indices de références définies dans leurs politiques de placement. Avant d'investir dans un fonds de couverture, une certaine évaluation des risques doit être entreprise. En particulier :

Risque spécifique du portefeuille Les risques des fonds de couverture diffèrent généralement de ceux des portefeuilles de classes d'actifs traditionnelles. Ils ne répondent pas toujours aux mêmes variables économiques ou financières.

Risque de marché Même si les rendements de certains fonds de couverture sont isolés des rendements des marchés il peut persister un risque résiduel lié aux mouvements des marchés financiers. Ce risque résiduel, par exemple, peut-être causé par un déséquilibre entre les positions longues et les positions à découvert, ou même, à l'occasion certaines positions de marché. Il ne faut pas oublier que lors de baisses importantes de marchés les corrélations ont tendance à augmenter. (Une raison de plus d'utiliser les copules dans un budget de risques). Les mesures de risques, telles les analyses de scénarios ou les stress-tests devraient être aussi utilisées par les gestionnaires du fonds. Il est avantageux d'investir dans des fonds de couverture où les gestionnaires du fonds ont de nombreuses années d'expériences, ainsi ils ne font pas leurs apprentissages aux détriments de la caisse de retraite.

Risque spécifique d'une stratégie Souvent certaines stratégies gagnantes perdent

de leurs efficacités au travers le temps car elles attirent de nouveaux joueurs. À titre d'exemple citons l'utilisation grandissante des instruments financiers de crédit.

Structure de gestion du fonds Un risque important peut être dû aux structures organisationnelles internes des fonds. Les fonds, en plus d'avoir de bons gestionnaires d'investissement, doivent aussi avoir de solides organisations administratives : *middle-office* et *back-office* afin de diminuer les risques opérationnels. Les fonds doivent suivre des procédures de gestion documentées. Le gestionnaire doit aussi avoir un plan de contingence en cas de désastre et un plan redondance pour les systèmes informatiques.

Risque de fraude La fraude peut aussi exister chez les gestionnaires de fonds, c'est probablement là le moyen le plus rapide pour perdre de l'argent. Dans les fonds de couverture la possibilité de fraude peut être présente à deux niveaux : (a) le vol des fonds (b) la publication de rendements surévalués ce qui a pour effet d'attirer de nombreux investisseurs, tout en infligeant des frais de gestion inappropriés.

Risques liés à l'évaluation Plusieurs fonds de couverture utilisent des investissements privés où il n'y a pas valeurs marchandes affichées. Il est cependant nécessaire de s'assurer que ces titres soient correctement évalués par une tierce partie.

Risque de liquidité Les fonds de couvertures peuvent être investis dans des titres dont la liquidité est inexistante cela présente un risque pour les participants de ce fonds. Ce risque se transmet aux investisseurs dans le sens qu'il est difficile sinon impossible de retirer ses fonds.

5.6 Utilisation des copules

L'utilisation des copules pour mesurer la dépendance entre divers marchés financiers est un bon outil. Les copules, contrairement aux coefficients de corrélations ne changent pas selon les conditions de marché, elles restent constantes. En conséquence, elles donnent une meilleure indication de la dépendance même dans les situations extrêmes de marché. Lorsque nous craignons des périodes turbulentes, nous aurons à notre

portée un bon indicateur de risque sous forme de mesure de probabilité. En 2008 nous avons été témoin de la coïncidence des rendements boursiers désastreux au travers le monde. La théorie des copules apporte un outil différent sur les mesures de dépendance entre les marchés financiers. Au chapitre sur les fonds de couverture nous avons expliqué comment établir l'effet de diversification entre plusieurs actifs financiers combinés à un portefeuille. À notre avis cela pourrait être le point de départ à l'application de la théorie des copules à l'univers des caisses de retraite.

5.7 Modélisation d'un portefeuille de marché

Afin de reproduire le plus fidèlement possible les rendements et les risques d'un portefeuille d'une caisse de retraite, nous utilisons les méthodes les plus couramment employées en finance de marché. Nous représentons un portefeuille composé des principales classes d'actifs présentes dans la plupart des portefeuilles institutionnels canadiens. Une partie en obligations gouvernementales ou corporatives, une partie en actions canadiennes, une diversification internationale, particulièrement en actions américaines, européennes ou japonaises.

Les gestionnaires de caisses de retraite sont de plus en plus préoccupés par la nature des risques qui affectent leurs rendements. Depuis 1993 on a observé une préoccupation grandissante par rapport à la gestion des risques des portefeuilles.

Il existe plusieurs modèles de mesure de risques. À l'origine de la mesure du risque d'un portefeuille diversifié on retrouve le CAPM proposé, dans les années 1950, par Markowitz et Sharpe. Dans les années 1990 ont émergé les modèles de Valeur à Risque (VaR) basés sur les matrices des covariances, les modèles de simulations historiques tels RiskMetrics proposés par JP Morgan, les modèles de simulations de Monte-Carlo. Finalement, plus récemment, l'étude des risques basés sur l'utilisation des copules.

Rappelons que le CAPM repose sur l'hypothèse de la normalité des rendements. Ce modèle est encore largement utilisé pour quantifier les risques de marché auxquels un portefeuille est exposé.

Dans cette section nous analysons le risque d'un portefeuille typique d'une caisse de retraite canadienne. Nous examinons aussi les risques liés à sa politique de placement. Les investissements d'une caisse typique sont en obligations, habituellement l'indice de référence est le Scotia McLeod Univers (SMU) maintenant le DEX, pour la partie actions canadiennes l'indice de référence est le S&P TSX (TSX), les investissements internationaux se divisent en actions américaines l'indice S&P 500 (SP) et reste du monde (MSCI).

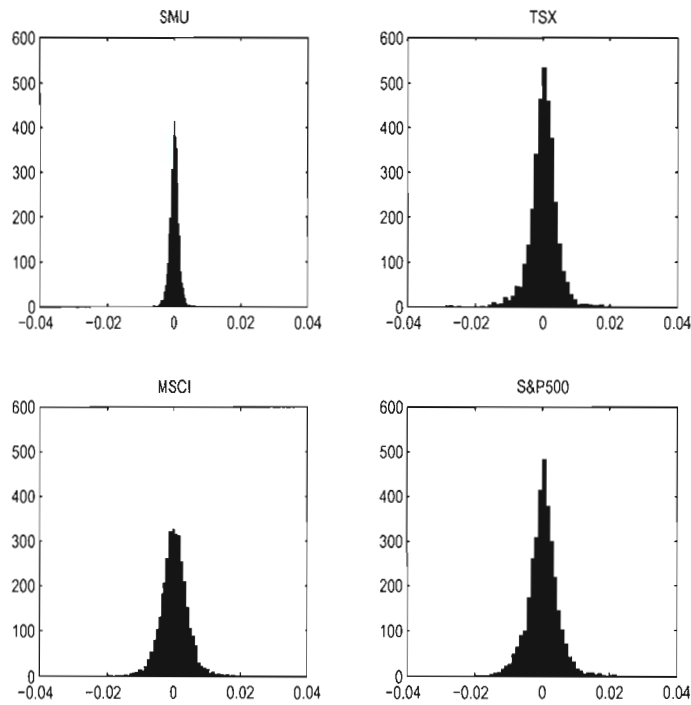


FIG. 5.1 – Quatre indices de marché choisis liés à une politique de placement d'une caisse de retraite canadienne typique. Pour fin de comparaison, chacun des histogrammes est construit à la même échelle.

À la figure 5.1 nous retrouvons les distributions de chacune des classes d'actifs qui entrent dans la composition d'un portefeuille d'une politique de placement. Aussi dans ce chapitre nous illustrons la contribution des copules à la mesure des risques d'un portefeuille de marché.

5.7.1 Choix des actifs

Une caisse de retraite qui souhaite adopter une nouvelle politique de placement a souvent recours au modèle du CAPM pour choisir une répartition d'actifs près de la frontière efficiente de Markowitz. L'application d'un tel modèle repose sur l'hypothèse de normalité des marges et de la matrice des corrélations linéaires. Au tableau 5.3, nous retrouvons le portefeuille de référence typique d'une caisse de retraite. La matrice des corrélations est présentée au tableau 5.2.

TAB. 5.2 – Matrice des corrélations pour les quatre indices de marchés

	Obl	CAD	ÉU	Int'l
Obligations	1.0000	0.0039	0.0027	-0.0775
Actions canadiennes	0.0039	1.0000	0.6629	0.3955
Actions américaines	0.0027	0.6629	1.0000	0.3408
Actions Internationales	-0.0775	0.3955	0.3408	1.0000

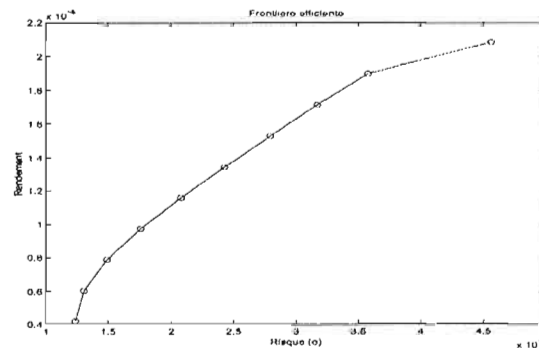


FIG. 5.2 – Frontière efficiente à partir de quatre indices de marché.

Construction de la frontière efficiente :

La construction de la frontière efficiente requiert comme entrants les prévisions des rendements et la matrice des corrélations. Le processus stochastique des rendements suivis par un actif boursier est donné par l'équation (5.1). Dans ce modèle, les rendements

TAB. 5.3 – Portefeuille de référence

Classe d'actif	Indice	Poids	$\sigma^2/2$ $\times 10^{-4}$
Obligations	DEX	30%	0.0092
Actions canadiennes	TSX	30	0.0817
Actions américaines	S&P	20	0.1041
Actions internationales	MSCI	20	0.0834
TOTAL		100	0.0652

TAB. 5.4 – Construction de la frontière efficiente.

PORTEFEUILLES EFFICIENTS

	Poids				Quotidien	
	SMU	TSX	S&P	MSCI	Rendement	Risque
	%	%	%	%	$\% \times 10^{-4}$	%
1	0.8482	0.0405	0.0218	0.0895	0.0209	0.12
2	0.7388	0.0524	0.0773	0.1315	0.0302	0.13
3	0.6293	0.0644	0.1329	0.1734	0.0394	0.15
4	0.5199	0.0763	0.1884	0.2154	0.0486	0.18
5	0.4105	0.0883	0.2440	0.2573	0.0579	0.21
6	0.3010	0.1002	0.2995	0.2992	0.0671	0.24
7	0.1916	0.1122	0.3551	0.3412	0.0764	0.28
8	0.0822	0.1241	0.4106	0.3831	0.0856	0.32
9	0	0.0446	0.5566	0.3987	0.0948	0.36
10	0.0000	0	1.0000	0	0.1041	0.46

proviennent de deux sources, une source déterministe et l'autre stochastique.

$$r_t = \ln \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} \right) = \underbrace{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt}_{\text{Source déterministe}} + \underbrace{\sigma dB_t}_{\text{Source stochastique}} \quad (5.1)$$

Afin qu'aucune classe d'actifs ne soit défavorisée par rapport à une autre, nous avons fixé la source des rendements déterministes égale à zéro. Ainsi, $\mu - \sigma^2/2 = 0$, ce qui veut dire que la dérive du processus est égale à $\sigma^2/2$.

Ainsi, à cause de la dérive implicite engendrée par le terme σdB_t le rendement prévu de chacun des titres qui entrent dans la composition du portefeuille prend comme valeur $\sigma^2/2$. En conséquence, il n'y a pas de biais dans le choix des actifs dû à un estimé subjectif de la prévision des rendements. La matrice des covariances est calculée à partir des données historiques.

Au tableau 5.4 le portefeuille no. 6 se rapproche le plus d'une politique de placement, le plus souvent retrouvée dans une caisse de retraite canadienne. Habituellement les pondérations en actions canadiennes sont plus importantes que les investissements en actions étrangères : le biais domestique.

Le terme de dérive du processus causé par le mouvement brownien décrit par l'équation (5.1) nous sert de *proxy* pour le rendement du portefeuille de référence, il nous est donné par :

$$R_p = \sum_{i=1}^4 W_i \frac{\sigma_i^2}{2} = 0.0652 \times 10^{-4},$$

les W_i représentent les pondérations de chacun des indices boursiers. Nous avons fixé $\mu_i - \sigma^2/2 = 0$ pour chacun des indices. Les valeurs de $\sigma^2/2$ sont indiquées au tableau 5.3. L'écart type des rendements de cette politique de placement est de 0.24% par jour tel que calculée à la section 5.7.2. La paire rendement-risque de cette politique de placement (0.0652, 0.24) est légèrement en bas du portefeuille efficient (#6) avec la paire rendement-risque de (0.0671, 0.24), légèrement moins de rendement pour le même niveau de risque.

5.7.2 Méthode des covariances

Dans l'industrie de la gestion de portefeuille on calcule souvent la Valeur à Risque (VàR) d'un portefeuille à partir de la matrice des covariances. Au tableau (5.2) nous

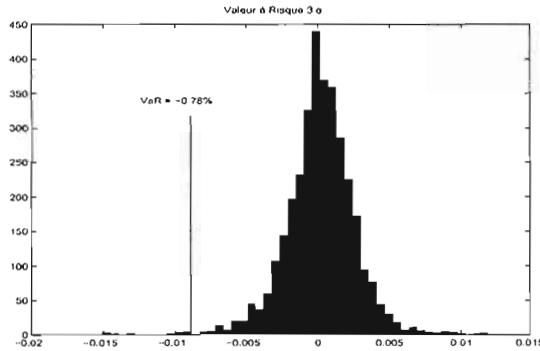


FIG. 5.3 – La dispersion des rendements de la politique de référence construite à partir de quatre indices de marché.

retrouvons cette matrice compilée à partir des écarts types des rendements historiques de chacune des classes d'actifs et des coefficients de corrélations linéaires entre chacune de ces classes d'actifs.

Les corrélations présentées au tableau 5.2 se traduisent en une matrice de covariances.

TAB. 5.5 – Matrice des covariances quotidiennes entre les quatre classes d'actif

Classe d'actif	SMU	TSX	S&P	MSCI
SMU	1.85E-06	2.169E-08	1.66E-08	-4.30E-07
TSX		1.63E-05	1.22E-05	6.53E-06
S&P			2.081E-05	6.35E-06
MSCI				1.67E-05

L'une des méthodes de mesure traditionnelle du risque d'un portefeuille est donnée par l'équation :

$$\sigma_p^2 = \mathbf{w}\Sigma\mathbf{w}^\top, \quad (5.2)$$

$\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ représente le vecteur des pondérations de chaque actif du portefeuille, et \mathbf{w}^\top sa transposée. Σ , la matrice des covariances. En appliquant cette mesure

aux données quotidiennes des rendements nous obtenons un écart type de 0.25%, et 0.75% à un niveau de trois écarts types.

Rappelons que l'hypothèse de mesure de risque sous cette méthode suppose des rendements distribués selon une loi normale. En conséquence le risque du portefeuille peut être annualisé en appliquant les propriétés du mouvement brownien, c'est-à-dire en multipliant par la racine carrée du nombre de jours ouvrables dans une année. Ainsi, l'écart type des rendements annuels, pour ce portefeuille, est de 4.7% avec 252 jours ouvrables. Si nous désirons en mesurer les risques à trois écarts types cela nous donne une valeur à risque est de 11.8% annuel, ce qui se traduit par la probabilité, qu'une année donnée, le portefeuille ait un rendement inférieur à ce niveau est de l'ordre de 0.5%.

5.7.3 Méthode du calcul de la VaR historique

Le calcul de la valeur à risque par la méthode historique est une méthode non-paramétrique, aucune hypothèse n'est faite tant qu'à la distribution des rendements. La VaR historique est bâtie en calculant les rendements quotidiens d'un portefeuille, ses rendements sont ensuite classés par ordre croissant. Nous choisissons le rang qui correspond au 0.5ième centile, afin d'avoir une mesure comparable à celle donnée par la méthode de la covariance. Pour le portefeuille sous observation nous trouvons une valeur à risque quotidienne au 0.5ième centile de 0.78%. Si nous annualisons en multipliant par la racine carrée du nombre de jours ouvrables¹ nous trouvons une valeur à risque de 12.3% par année.

5.7.4 Méthode de simulations Monte Carlo

La méthode de simulation de Monte Carlo est une méthode paramétrique, elle suppose que le portefeuille suit une promenade aléatoire en temps continu. Elle est de

¹Cette méthode d'annualisation suppose que les rendements sont distribués selon une loi normale.

la forme :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t,$$

S_t la valeur de l'actif ou du portefeuille au temps t ,

μ la dérive ou le rendement du le portefeuille, cette valeur est constante,

dB_t les accroissements indépendants du mouvement brownien.

De telles simulations nécessitent la discrétisation du mouvement brownien :

$$\Delta S_t = \mu S_t \Delta t + \sigma S_t \sqrt{\Delta t} \epsilon_t$$

ΔS_t la variation de l'actif ou du portefeuille,

Δt l'intervalle de temps,

ϵ_t une variable aléatoire iid selon une loi $\mathcal{N}(0,1)$. Les rendements peuvent être ensuite simulés par :

$$\ln \left(\frac{S_T}{S_0} \right) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma S_T \sqrt{\Delta T} \epsilon_T, \quad (5.3)$$

la variance est constante.

Cette méthode peut être modifiée en appliquant un modèle GARCH(1,1) afin de tenir compte de la volatilité stochastique.

$$\sigma_{t+1}^2 = \omega + \alpha R_t^2 + \beta \sigma_t^2, \text{ avec } \alpha + \beta < 1.$$

La variance non-conditionnelle à long terme est définie par :

$$\begin{aligned} \sigma^2 &\equiv E[\sigma_{t+1}^2] = \omega + \alpha E[R_t^2] + \beta E[\sigma_t^2] \\ &= \omega + \alpha \sigma^2 + \beta \sigma^2, \end{aligned}$$

ainsi,

$$\sigma^2 = \frac{\omega}{(1 - \alpha - \beta)}.$$

Si $\alpha + \beta = 1$ on a le cas du modèle RiskMetrics.

5.7.5 Méthode de la valeur à risque avec les copules

Embrechts et al. (11) présentent plusieurs faussetés liées à l'utilisation du coefficient de corrélation linéaire comme mesure de dépendance entre des variables aléatoires.

Fausseté 1 (Distribution conjointe) *Les distributions marginales et la corrélation déterminent la distribution conjointe.*

Cet énoncé est vrai uniquement pour les normales multivariées ou pour des distributions elliptiques.

Fausseté 2 (Combinaison de coefficients de corrélations linéaires) *Pour des distributions marginales F_1 et F_2 données de X et de Y , toutes corrélations linéaires possibles entre -1 et 1 peuvent être obtenues par un choix judicieux des distributions conjointes.*

Le théorème 4, dû à Hoeffding et Fréchet, énonce les corrélations possibles pour des distributions marginales données.

Théorème 4 (Hoeffding (1940) et Fréchet (1957)) *Soit $(X, Y)^T$ un vecteur aléatoire avec les distributions marginales F_1 et F_2 et une structure de dépendance non spécifiée; en supposant que $0 < \sigma^2[X], \sigma^2[Y] < \infty$. Alors*

1. *L'ensemble possible de toutes les corrélations sont dans l'intervalle fermée $[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$ avec $\rho_{\min} < 0 < \rho_{\max}$,*
2. *La corrélation extrême $\rho = \rho_{\min}$ peut être atteinte ssi X et Y sont discordants et la corrélation $\rho = \rho_{\max}$ est atteinte ssi X et Y sont concordants,*
3. *$\rho_{\min} = -1$ ssi $X = -Y$ et de même type; $\rho_{\max} = 1$ ssi $X = Y$ et sont de même type.*

Fausseté 3 (Pire scénario associé à la VaR) *Le pire cas pour la VaR (quantile) pour un portefeuille linéaire $X + Y$ se manifeste lorsque $\rho(X + Y)$ est à son maximum, c'est-à-dire lorsque X et Y sont comonotoniques.*

Pour une mesure de risque obtenue par le coefficient de corrélation linéaire, même si $\sigma^2(X + Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y) + 2\rho(X, Y)\sigma(X)\sigma(Y)$ est maximal lorsque la corrélation entre X et Y est maximale, il est incorrect de conclure que la VaR est aussi à son maximum.

Théorème 5 (Makarov (1981)) *Déterminer les bornes supérieures et inférieures.*

1. Pour tout $z \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}[X + Y \leq z] \sup_{x+y=z} C_\ell(F_1(x), F_2(y)) := \psi(z).$$

2. Si $\psi^{-1}(\alpha) := \inf\{z \mid \psi(z) \geq \alpha\}$, $\alpha \in (0, 1)$ alors :

$$\psi^{-1}(\alpha) = \inf_{C_\ell(u,v)=\alpha} \{F_1^{-1}(u) + F_2^{-1}(v)\},$$

3. La plus grande borne supérieure pour la valeur à risque est :

$$VaR_\alpha(X + Y) \leq \psi^{-1}(\alpha).$$

Pour les démonstrations des théorèmes 4 et 5 voir Embrechts et al (11).

Du théorème 5 découle l'application suivante : si

$$F_\ell(x_1, x_2) = \max\{F_1(x) + F_2(x_2) - 1, 0\} \text{ et } \{F_u(x_1, x_2) = \min\{F_1(x_1), F_2(x_2)\}\}$$

alors le mixte $\lambda F_\ell(x_1, x_2) + (1 - \lambda)F_u$, $0 \leq \lambda \leq 1$

a une corrélation $\lambda\rho_{\min} + (1 - \lambda)\rho_{\max}$. En utilisant de tels mixtes nous pouvons construire des distributions conjointes avec des marges F_1 et F_2 et une corrélation arbitraire $\rho \in [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$. Ainsi pour un portefeuille composé de n titres, avec les poids (w_1, w_2, \dots, w_n) $w_i \geq 0$ et $\sum_{i=0}^n w_i = 1$, alors nous pouvons créer le mixte suivant :

$$C(u, v) = w_1 C_1(u, v) + w_2 C_2(u, v).$$

Copules à plusieurs dimensions

Barbe et al 1996 (4) étendent la fonction K décrite à la section 2.2.10 à une copule de plusieurs dimensions. Pour la fonction $K(v) = \mathbb{P}\{H(\mathbf{X}) \leq v\}$, la copule empirique,

est définie par :

$$K_n(v) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{I}(V_{jn} \leq v), \quad v \in [0, 1],$$

les pseudo observations pour la copule de dimension d sont données par :

$$V_{jn} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{I}(X_{1k} \leq X_{1j}, \dots, X_{dk} \leq X_{dj}),$$

en utilisant les rangs on obtient :

$$V_{jn} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{I}(R_{1k} \leq R_{1j}, \dots, R_{dk} \leq R_{dj}).$$

En appliquant cette méthodologie aux données de marché nous pouvons générer la copule empirique liant les quatre indices boursiers. Par la suite, en utilisant la méthode de Marshall et Olkin (25), nous générons les copules à quatre dimensions et nous appliquons la méthodologie utilisée pour la copule empirique pour trouver la fonction $K_n(v)$.

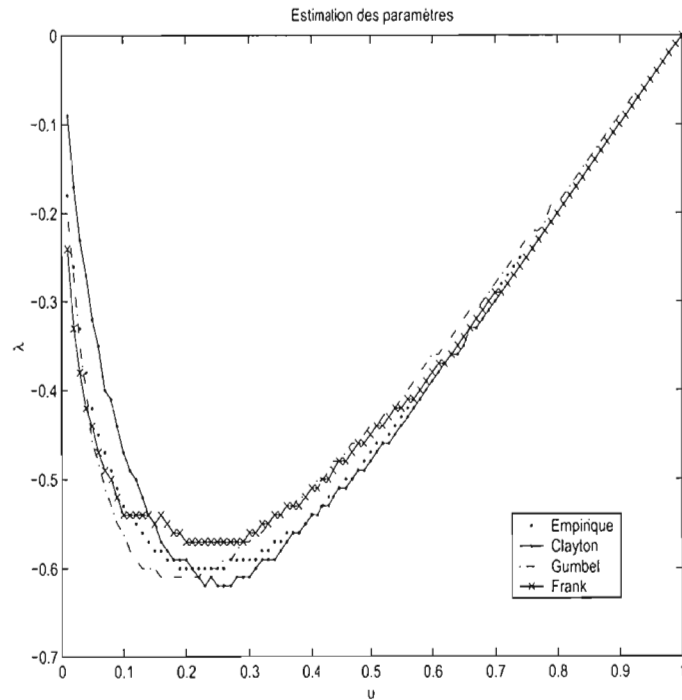


FIG. 5.4 – La représentation copule des quatre indices de marché.

5.7.6 Analyse de sensibilité (copules)

Dans cette section nous examinons le comportement de la copule en périodes de forte volatilité comparativement aux périodes de volatilité dites normales. Nous avons choisi de janvier 1997 à juin 2003 pour la période de haute volatilité, alors que pour les marchés de volatilités normales la période de janvier 1992 à décembre 1996 conjuguée à la période de juillet 2003 à mai 2006.

Au tableau 5.6 nous avons les matrices des corrélations de rangs pour les quatre indices qui entrent dans la composition de la politique de placement d'un portefeuille. On remarque une différence importante selon les périodes sous observations. Au tableau 5.7 nous avons la valeur du paramètre pour chacun des trois types de copules étudiées, Clayton, Gumbel et Frank. Nous attirons l'attention sur le fait qu'aux quatre indices boursiers choisis, nous avons ajouté l'indice obligataire, le Scotia McLeod Univers (SMU) maintenant DEX. En général, les obligations sont de bons éléments de diversification. En examinant conjointement les tableaux 5.6 et 5.7, on voit que le paramètre τ est plus faible en période de forte volatilité, cela s'explique par le fait que les corrélations de rangs, mesurées par le τ de Kendall sont négatives pour les obligations (SMU) par rapport aux indices boursiers MSCI, S&P500 et TSX. Cette représentation graphique est une aide visuelle pour identifier le type de copule qui se rapproche le plus de la copule empirique. L'éloignement $v_n(K_m - K)$ dépend de la copule Genest, Rémillard et Quessy 2005 (19).

Si nous isolons les trois indices boursiers, pour les mêmes périodes de volatilité on remarque une différence importante entre les périodes de volatilités normales et celles de fortes volatilités. Au tableau 5.8, par exemple on peut voir que le paramètre τ de Kendall, utilisé pour générer la copule théorique est beaucoup plus élevé en périodes de fortes volatilités.

TAB. 5.6 – Matrices de corrélations des rangs (τ de Kendall).

Toute la période
Janvier 1992 à mai 2006

	SMU	MSCI	S&P500	TSX
SMU	1	-0.0427	0.0270	0.0103
MSCI		1	0.1979	0.2599
S&P500			1	0.4252
TSX				1

(b) Période de haute volatilité (janvier 1997 à juin 2003)
(Janvier 1997 à juin 2003)

	SMU	MSCI	S&P500	TSX
SMU	1	-0.0605	-0.0846	-0.0502
MSCI		1	0.2532	0.3175
S&P500			1	0.5040
TSX				1

(c) Période de volatilité normale
(Janvier 1992 – décembre 1996 et juillet 2003 – mai 2006)

	SMU	MSCI	S&P500	TSX
SMU	1	-0.0293	-0.1322	0.0655
MSCI		1	0.1387	0.1907
S&P500			1	0.350
TSX				1

TAB. 5.7 – Copule empirique et théorique pour la période de 1992 à 2006

Éloignement par rapport à la copule empirique

(a) Toute la période

Copule	τ	Minimum	Maximum
Clayton	0.143	-0.09	0.63
Gumbel	0.153	-0.04	0.04
Frank	0.151	-0.04	0.07

(b) Période de haute volatilité (janvier 1997 à juin 2003)

Clayton	0.115	-0.07	0.05
Gumbel	0.1425	-0.05	0.04
Frank	0.125	-0.03	0.05

(c) Période de volatilité normale

(Janvier 1992 – décembre 1996 et juillet 2003 – mai 2006)

Clayton	0.1425	-0.04	0.05
Gumbel	0.150	-0.04	0.04
Frank	0.135	-0.02	0.10

TAB. 5.8 – Copule empirique et théorique comparaison de la période de haute volatilité avec la période de volatilité normale.

Éloignement par rapport à la copule empirique
Trois marchés des actions MSCI, S&P500 et TSX

(a) Période de haute volatilité
(Janvier 97 à juin 2003)

Copule	τ	Minimum	Maximum
Clayton	0.360	-0.06	0.04
Gumbel	0.380	-0.04	0.08
Frank	0.370	-0.04	0.08

(b) Période de volatilité normale
(Janvier 1992 – décembre 1996 et juillet 2003 – mai 2006)

Clayton	0.205	-0.04	0.04
Gumbel	0.235	-0.02	0.05
Frank	0.213	-0.02	0.06

CONCLUSION

Nous avons vu que les copules apportent beaucoup à la finance de marché. Leurs applications sont nombreuses soit comme outils pour mesurer la dépendance entre les actifs ou les marchés ; ou soit comme outils de simulations pouvant être utilisés à la valorisation d'instruments financiers reposant sur les comportements conjoints de plusieurs actifs sous-jacents. Les copules peuvent de plus être utilisées pour mesurer les risques et elles permettent la modélisation de plusieurs phénomènes financiers qui impliquent plusieurs marchés. Elles reposent sur un cadre mathématique formel.

C'est une théorie relativement nouvelle qui n'a pas encore franchie les portes des caisses de retraite. Comme nous le savons la théorie moderne de portefeuille développée à partir des travaux de Markowitz et Sharpe, dans les années 1950, est appliquée à peine depuis une trentaine d'années. Plusieurs modèles de construction de portefeuille reposent sur l'estimation d'une frontière efficiente. Or la validité d'un modèle d'optimisation dépend de la qualité de ses hypothèses. Étant impossible de prévoir les rendements des marchés financiers, le choix des portefeuilles efficients requiert la prévision des rendements des actifs entrant dans leurs compositions. En conséquence les résultats obtenus par les algorithmes d'optimisation se prêtent mal aux choix des actifs. Si on souhaite malgré tout utiliser ces résultats pour la sélection des classes d'actifs, ils doivent l'être avec beaucoup de jugement de la part des gestionnaires de portefeuilles. Ajoutons aussi que cette théorie repose sur la normalité des rendements, or comme nous avons vu les rendements des actifs financiers ne se conforment pas à cette loi.

Depuis le début des années 2000 nous avons vécu deux périodes pendant lesquelles la coïncidence baissière des marchés a fait perdre confiance dans les bénéfices de la diversification. Même si les principes de la diversification ont été mis en doute, nous croyons que la cause des déboires financiers est principalement due à la mauvaise compréhension

des distributions conjointes des marchés financiers.

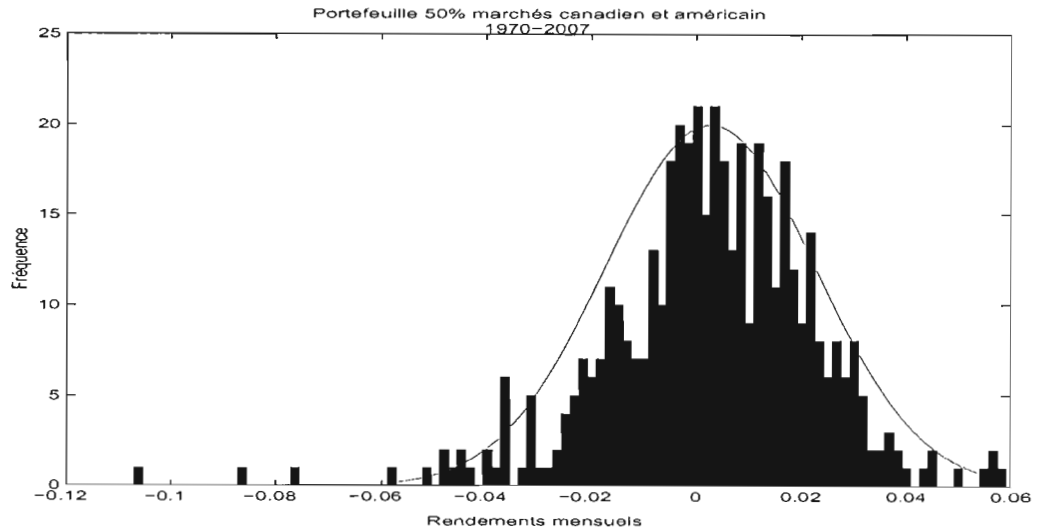
Dans un tel contexte, se doter d'outils différents permet de contourner les lacunes que nous a léguées la théorie moderne de portefeuille. Nous savons aussi, que le monde de l'investissement est composé d'individus avec des caractères plutôt conservateurs et pas toujours ouverts à de nouvelles idées à moins qu'elles ne promettent des rendements hors de l'ordinaire.

À la question : comment la théorie des copules est-elle une meilleure mesure que celles utilisées actuellement, par exemple, les coefficients de corrélations linéaires. Pour répondre à cette question référons nous à la section (2.2.4) page (62) où nous avons fait état des défaillances liées à l'utilisation des coefficients de corrélations linéaires. Nous avons conclu que leurs utilisations s'appliquent mal à la compréhension des structures de dépendance entre les différents marchés financiers. Le coefficient de corrélation linéaire donne une information qui se résume à une valeur numérique située entre -1 et 1 . Si le coefficient entre deux actifs risqués est inférieur à un on atteint l'objectif de diversification qui devrait avoir pour effet de réduire le risque total du portefeuille. La mesure de risque est donnée par la variance ou l'écart type de ce portefeuille. Prenons à titre d'exemple les marchés canadien et américain. Si nous utilisons les données mensuelles du marché canadien et américain pour la période entre 1970 et 2007, le coefficient de corrélation linéaire entre ces deux marchés est de 0.723 avec des écarts types 2.40% et 1.89% par mois respectivement. Un portefeuille pondéré également entre les deux marchés devrait avoir un niveau de risque de :

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \sqrt{W_C^2 \sigma_C^2 + W_U^2 \sigma_U^2 + 2W_C W_U \sigma_C \sigma_U \rho_{CU}} \\ &= \sqrt{0.5^2 \times 0.0240^2 + 0.5^2 \times 0.0189^2 + 2 \times 0.5^2 \times 0.0240 \times 0.0189 \times 0.723} \\ &= 0.020 \text{ par mois.}\end{aligned}$$

Ainsi, le risque pour un investisseur dans le marché canadien est quelque peu réduit par un investissement additionnel dans le marché américain. En conséquence, selon la théorie du CAPM, un investissement aux États-Unis est une bonne chose. Le gestionnaire

pourrait aussi se questionner sur la dispersion des rendements du nouveau portefeuille ainsi que sa distribution de probabilité.



En premier lieu on observe que les rendements ne suivent pas une loi normale à cause des rendements extrêmes. Souvent cette observation conclut l'analyse des risques et elle s'arrête à ce point là. Cependant si le gestionnaire est un peu plus sophistiqué il pourra tenter de faire une analyse GARCH à partir des données de son portefeuille afin de mieux comprendre le comportement de sa variance.

En utilisant les copules on peut tirer des mêmes données une masse beaucoup plus riche de renseignements sur la distribution conjointe des rendements des marchés canadien et américain. Dans un premier temps nous pouvons examiner la copule empirique afin de diagnostiquer de quelle façon les deux marchés évoluent conjointement. À la figure suivante on voit la répartition de la copule empirique qui illustre les rendements conjoints entre les marchés canadien et américain. On note une forte concentration des observations dans les queues des distributions. Ce regroupement d'observations indique que lors, soit d'une forte baisse ou d'une forte hausse, les deux marchés ont tendance à évoluer dans la même direction. Ainsi, dans les extrêmes de la distribution conjointe

les mérites de la diversification ont tendance à s'estomper. On peut voir les valeurs numériques de la copule à la partie (b) du tableau suivant, où 5% des observations se regroupent dans le centile inférieure 0.1— 0.1 ce qui indique une probabilité de 5% que les deux marchés aient un rang normalisé de moins de 10% de l'ensemble des observations et soit une probabilité de près de 4% que les observations se regroupent dans le centile supérieure 0.9 — 0.9 de la distribution conjointe.

(a)

$$C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq \mathbf{u}_1, U_2 \leq \mathbf{u}_2] \text{ nobs} = 456$$

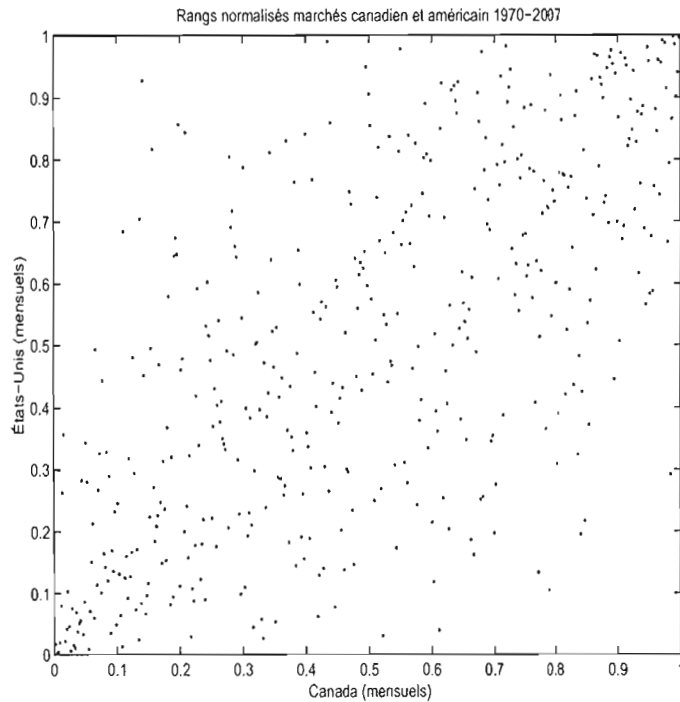
U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.050	0.070	0.086	0.094	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099	0.099
0.2	0.072	0.116	0.149	0.167	0.180	0.182	0.191	0.193	0.197	0.200
0.3	0.081	0.140	0.184	0.219	0.252	0.265	0.283	0.287	0.296	0.298
0.4	0.090	0.162	0.226	0.276	0.325	0.351	0.373	0.382	0.397	0.399
0.5	0.094	0.178	0.250	0.316	0.379	0.423	0.458	0.474	0.491	0.500
0.6	0.096	0.182	0.263	0.338	0.417	0.471	0.520	0.550	0.588	0.599
0.7	0.099	0.193	0.285	0.373	0.461	0.531	0.588	0.627	0.675	0.700
0.8	0.099	0.197	0.292	0.384	0.474	0.555	0.632	0.697	0.763	0.798
0.9	0.099	0.200	0.296	0.397	0.498	0.588	0.675	0.763	0.838	0.899
1.0	0.099	0.200	0.298	0.399	0.500	0.599	0.700	0.798	0.899	1.000

(b)

$$c(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{\partial^2 C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}{\partial \mathbf{u}_1 \partial \mathbf{u}_2} \text{ nobs} = 456$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.050	0.020	0.015	0.009	0.004	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.022	0.024	0.018	0.009	0.009	0.002	0.009	0.002	0.004	0.002
0.3	0.009	0.015	0.011	0.018	0.020	0.011	0.009	0.002	0.004	0.000
0.4	0.009	0.013	0.020	0.015	0.015	0.013	0.004	0.004	0.007	0.000
0.5	0.004	0.011	0.009	0.015	0.015	0.018	0.013	0.007	0.002	0.007
0.6	0.002	0.002	0.009	0.009	0.015	0.011	0.013	0.015	0.020	0.002
0.7	0.002	0.009	0.011	0.013	0.009	0.015	0.009	0.009	0.011	0.013
0.8	0.000	0.004	0.002	0.004	0.002	0.011	0.020	0.026	0.018	0.011
0.9	0.000	0.002	0.002	0.009	0.011	0.009	0.011	0.022	0.009	0.026
1.0	0.000	0.000	0.002	0.000	0.000	0.009	0.013	0.011	0.026	0.039

On peut aussi observer les regroupements des rendements dans les queues de la fonction de densité (la dérivée de la copule) empirique représentée par l'histogramme en

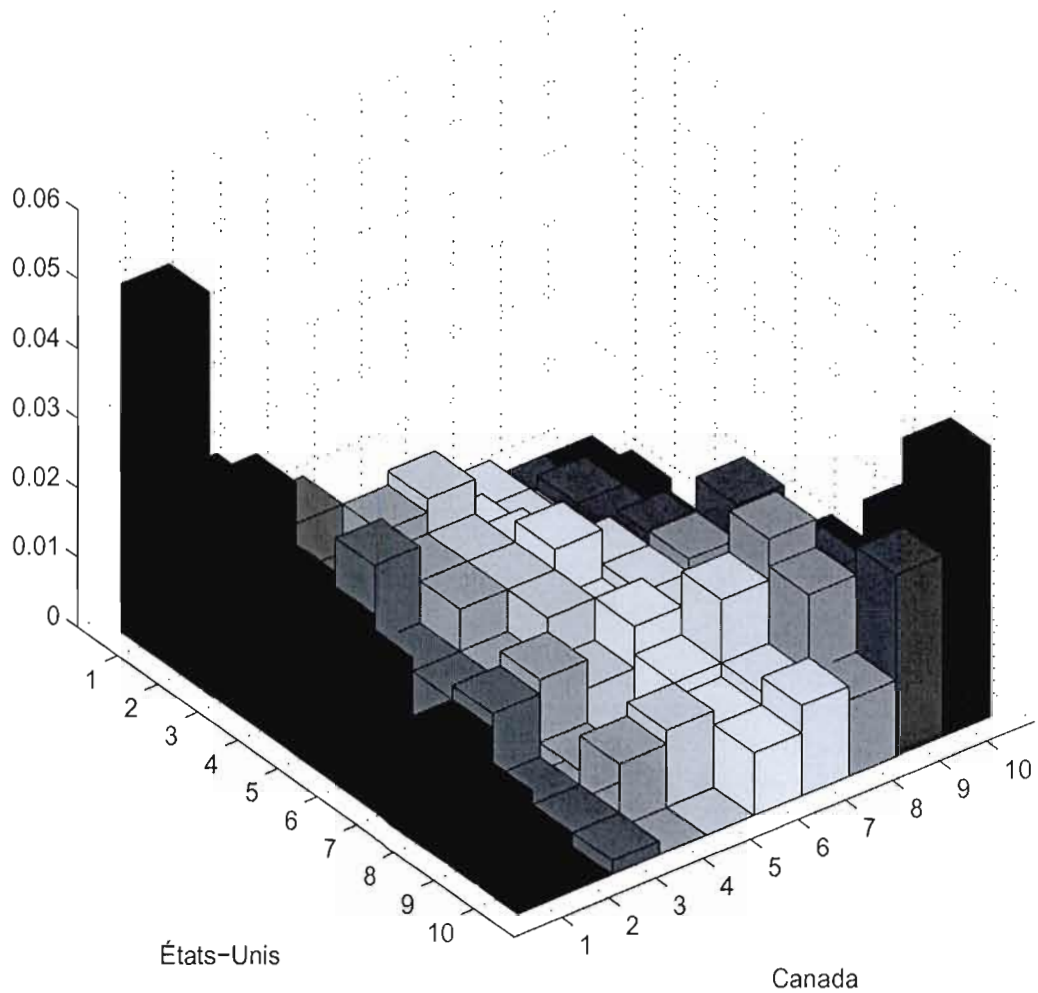


trois dimensions. Les copules permettent de simuler le comportement conjoint, entre deux marchés financiers, il y a plusieurs types de copules qui peuvent être utilisées relativement facilement : les copules de type elliptique et les copules de type archimédien. Rappelons que les copules gaussiennes, se simulent facilement mais elles supposent la normalité des observations. La copule de Clayton se prête bien si nous souhaitons accentuer une forte dépendance dans les queues inférieures des distributions alors que pour la copule de Gumbel les points se regroupent dans les queues supérieures des distributions, dans le cas de la copule de Frank les observations se regroupent à la fois dans les queues inférieures et supérieures des distributions.

À la question : comment la théorie des copules peut-elle être mise en pratique, par une caisse de retraite par exemple ?

1. La plupart des gestionnaires de caisses de retraite sont conformistes. Ils sont peu ouverts à l'application de techniques qu'ils ne maîtrisent pas bien. Comme la théorie des copules n'est pas un sujet facile, qui exige un bagage mathématique impor-

Distribution conjointe marchés canadien et américain



tant. Il sera probablement difficile de franchir les portes des caisses de retraite avec l'application de cette théorie. Il faut cependant noter que ces gestionnaires, souvent peu sophistiqués, avec l'aide de leurs actuaires ont probablement déjà utilisé la théorie moderne de portefeuille pour la sélection des poids des classes d'actifs de leurs portefeuilles. Cette méthodologie est exposée à la section (5.7.1).

2. La théorie des copules n'étant pas un sujet trivial, il faut qu'elle fasse son chemin graduellement. Il est difficile d'imposer une nouvelle théorie si au préalable elle

n'a pas été expliquée ou comprise. Pour la théorie des copules il faut commencer à partir d'éléments déjà connus. En l'occurrence, utiliser une copule gaussienne comme mesure de dépendance conjointement avec des marges gaussiennes. Cette approche rejoint la théorie de la diversification de Markowitz. La comparaison est ainsi plus facile à faire. Il y aura qu'un pas à franchir pour illustrer les avantages de la théorie des copules comparés aux outils *traditionnels* de la gestion moderne de portefeuille. Une copule est beaucoup plus riche en termes d'informations se rapportant aux distributions conjointes entre les différents actifs financiers. Cela représente un point de départ.

3. Une autre démarche sera d'exposer la théorie des copules, ainsi que ses avantages pour la gestion de portefeuille aux firmes d'actuaire conseil. Les firmes d'actuaire conseil jouent un rôle prédominant au près des régimes de retraite. Leurs recommandations font force de loi, du moins au Québec à cause de la nouvelle loi 30 qui réglemente la gestion des régimes de retraite dans la province. L'un des points importants requis par la réglementation est la connaissance et la compréhension des risques auxquels un régime de retraite est exposé, les risques de marché et la gestion du risque actif—passif en font parti.
4. Si une firme de gestion de portefeuille prend le rôle de leader en ce domaine cela aura pour effet d'inciter d'autres firmes de gestion à suivre ses traces. Une meilleure compréhension de la structure de dépendance entre les marchés financiers offre un avantage concurrentiel important.
5. Finalement, une recommandation, à plus long terme, est de donner dans les cours gradués en finance une partie de la théorie des copules ainsi que ses applications. La théorie pourrait être plus poussée dans les écoles d'actuariat puisque les candidats ont une meilleure formation mathématiques que les étudiants dans les facultés d'administration.

Finalement, la théorie des copules peut être utilisée à des applications autres que la gestion des risques. Elle est utilisée à la valorisation d'options sur plus d'un actif sous-jacent comme nous l'avons exposé au chapitre (III). Il existe par ailleurs beaucoup

d'autres applications qui peuvent être développées avec l'aide de la théorie des copules : modélisation des risques de crédit qui prennent un rôle de plus en plus important dans la gestion des portefeuilles, la valorisation des options de type digital, des applications dans la structures des cotes de crédit pour les différentes qualités d'émetteurs ainsi que les modèles à taux d'intérêt et la valorisation des options de type digital, pour u'en nommer que quelques uns.

Annexe A

COPULES ARCHIMÉDIENNES

Selon Nelsen 1991 *An introduction to copula* p.93.

#	$C_\theta(u, v)$	$\varphi_\theta(t)$	$\theta \in$	Stricte
1	$\max\left([u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{-1/\theta}, 0\right)$	$\frac{1}{\theta} (t^{-\theta} - 1)$	$[-1, \infty) \setminus 0$	$\theta \geq 0$
2	$\max\left(1 - [(1-u)^\theta + (1-v)^\theta]^{1/\theta}, 0\right)$	$(1-t)^\theta$	$[1, \infty)$	non
3	$\frac{uv}{1-\theta(1-u)(1-v)}$	$\ln \frac{1-\theta(1-t)}{t}$	$[-1, 1)$	oui
4	$\exp\left(-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta}\right)$	$(-\ln t)^\theta$	$[1, \infty)$	oui
5	$-\frac{1}{\theta} \ln\left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1}\right)$	$-\ln\left(\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}\right)$	$(-\infty, \infty)$	oui
6	$1 - [(1-u)^\theta + (1-v)^\theta]^{1/\theta}$	$-\ln[1 - (1-t)^\theta]$	$[1, \infty)$	oui
7	$\max(\theta uv + (1-\theta)(u+v-1), 0)$	$-\ln[(\theta t + (1-\theta))]$	$(0, 1]$	non
8	$\max\left[\frac{\theta^2 uv - (1-u)(1-v)}{\theta^2 - (\theta-1)^2(1-u)(1-v)}, 0\right]$	$\frac{1-t}{1+(\theta-1)t}$	$[1, \infty)$	non
9	$uv \exp(-\theta \ln u \ln v)$	$\ln(1 - \theta \ln t)$	$(0, 1]$	oui
10	$\frac{uv}{[1+(1-u)^\theta(1-v)^\theta]^{1/\theta}}$	$\ln(2t^{-\theta} - 1)$	$(0, 1)$	oui
11	$\max\left([u^\theta v^\theta - 2(1-u)^\theta(1-v)^\theta]^{1/\theta}, 0\right)$	$\ln(2 - t^\theta)$	$(0, 1/2]$	non
12	$(1 + [(u^{-1} - 1)^\theta + (v^{-1} - 1)^\theta]^{1/\theta})^{-1}$	$(\frac{1}{t} - 1)^\theta$	$[1, \infty)$	oui

Selon Nelsen 1991 *An introduction to copula* p.93,(suite).

#	$C_\theta(u, v)$	$\varphi_\theta(t)$	$\theta \in$	Stricte
13	$\exp(1 - [(1 - \ln u)^\theta + (1 - \ln v)^\theta - 1]^{1/\theta})$	$(1 - \ln t)^\theta - 1$	$(0, \infty)$	oui
14	$(1 + [(u^{-1/\theta} - 1)^\theta + (v^{-1/\theta} - 1)^\theta]^{1/\theta})^{-\theta}$	$(t^{-1/\theta} - 1)^\theta$	$[1, \infty)$	oui
15	$\max(\{1 - [(1 - u^{1/\theta})^\theta + (1 - v^{1/\theta})^\theta]^{1/\theta}\}^\theta, 0)$	$(1 - t^{1/\theta})^\theta$	$[1, \infty)$	non
16	$\frac{1}{2}(S + \sqrt{S^2 + 4\theta})$ $S = u + v - 1 - \theta(\frac{1}{u} + \frac{1}{v} - 1)$	$(\frac{\theta}{t} + 1)(1 - t)$	$[0, \infty)$	$\theta > 0$
17	$\left(1 + \frac{[(1+u)^{-\theta} - 1][(1+v)^{-\theta} - 1]}{2^{-\theta} - 1}\right)^{-1/\theta} - 1$	$-\ln \frac{(1+\theta)^{-\theta} - 1}{2^{-\theta} - 1}$	(∞, ∞)	oui
18	$\max(1 + \theta \ln [e^{\theta/(u-1)} + e^{\theta/(v-1)}], 0)$	$e^{\theta/(t-1)}$	$[2, \infty)$	no
19	$\frac{\theta}{\ln(e^{\theta/u} + e^{\theta/v} - e^\theta)}$	$e^{\theta/t} - e^\theta$	$(0, \infty)$	oui
20	$[\ln(\exp(u^{-\theta} + \exp(v^{-\theta}) - e)]^{-1/\theta}$	$\exp(t^{-\theta}) - e$	$(0, \infty)$	oui
21	$1 - \left(1 - \left\{\max[1 - (1 - u)^\theta]^{1/\theta} + [1 - (1 - v)^\theta]^{1/\theta} - 1, 0\right\}^\theta\right)^{1/\theta}$	$1 - [1 - (1 - t)^\theta]^{1/\theta}$	$[1, \infty)$	non
22	$\max\left(\left[1 - (1 - u^\theta \sqrt{1 - (1 - v^\theta)} - (1 - u^\theta \sqrt{1 - (1 - v^\theta)})^{1/\theta, 0}\right]^{1/\theta}, 0\right)$	$\arcsin(1 - t^\theta)$	$[0, 1)$	oui

Annexe B

MÉTHODOLOGIE DE STULZ POUR L'ÉVALUATION D'UNE OPTION SUR DEUX ACTIFS FINANCIERS

Stulz (32) a développé une formule analytique pour valoriser une option de type européen basée sur deux actifs sous-jacents. La valorisation de l'option se fait dans un univers neutre au risque. La valeur de l'option aujourd'hui est en conséquence égale à la valeur espérée à l'échéance de l'option, actualisée au taux de rendement sans risque. La construction du modèle se fait sur la base d'un portefeuille auto financé. Ce portefeuille consiste en investissements dans les actifs risqué V et H et l'actif sans risque qui rapporte un rendement de r_f . Stulz pose $M(V, H, F, T - t)$ la valeur du call européen basé sur le $\min(V, H)$ à l'échéance T de l'option. F est le prix de levée de l'option, le temps restant avant l'échéance de l'option est exprimé par $\tau = T - t$. Pour trouver la valeur de M il suffit de trouver la valeur du portefeuille auto financé P . Sa valeur au temps T est la même que celle de l'option. Ainsi, la valeur de ce portefeuille au temps $t \forall t \leq T$ est égale à la valeur de l'option au temps t . En utilisant la formule d'Ito à deux dimensions la dynamique du portefeuille P est décrite par :

$$dP = \frac{\partial P}{\partial V}dV + \frac{\partial P}{\partial H}dH - \frac{\partial P}{\partial t}dt + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} V^2 \sigma_V^2 + \frac{\partial^2 P}{\partial H^2} H^2 \sigma_H^2 + 2\rho_{VH} \sigma_V \sigma_H \right\} dt \quad (\text{B.1})$$

Ce portefeuille peut aussi être exprimé par l'équation :

$$dP = x \frac{dV}{V} P + y \frac{dH}{H} P + (1 - x - y)r_f P dt \quad (\text{B.2})$$

x et y sont les proportions du portefeuille investis dans les actifs V et H

respectivement.

En posant l'équation (B.1) égale à (B.2), il s'en suit que les variables x et y doivent satisfaire les équations suivantes pour tout point dans le temps :

$$\frac{\partial P}{\partial V} V = xP, \quad (\text{B.3})$$

$$\frac{\partial P}{\partial H} H = yP. \quad (\text{B.4})$$

Les conditions au bord suivantes doivent aussi être satisfaites :

$$P(V, H, 0) = \max \{ \min(V, H) - F, 0 \}, \quad (\text{B.5})$$

$$P(0, H, \tau) = 0, \quad (\text{B.6})$$

$$P(V, 0, \tau) = 0. \quad (\text{B.7})$$

B.1 Call on min

La première étape de la démarche proposée par Stulz permet la valorisation d'options d'achat de type européen sur le minimum de deux actifs risqués. Le paiement offert par cette option :

$$M(V, H, F, \tau) = \max(\min(V, H) - F, 0).$$

Selon Stulz la solution de l'équation est :

$$\begin{aligned}
 & \text{Équation originale} \\
 M = & HN_2 \left((\gamma_1 + \sigma_H \sqrt{\tau}); (\ln \frac{V}{H} - \frac{1}{2} \sigma^2 \sqrt{\tau}) / (\sigma \sqrt{\tau}); (\rho_{VH} \sigma_V - \sigma_H) / \sigma \right) \\
 & + VN_2 \left((\gamma_2 + \sigma_V \sqrt{\tau}); (\ln \frac{H}{V} - \frac{1}{2} \sigma^2 \sqrt{\tau}) / (\sigma \sqrt{\tau}); (\rho_{VH} \sigma_H - \sigma_V) / \sigma \right) \\
 & - Fe^{-r_f \tau} N_2(\gamma_1; \gamma_2; \rho_{VH})
 \end{aligned}$$

Note :

Notons cependant qu'en utilisant les équations (A-1) à (A-5) de l'annexe 1 de l'article de Stulz, nous devrions trouver la solution suivante :

$$\begin{aligned}
 & \text{Équation corrigée} \\
 M = & HN_2 \left(\underbrace{(\gamma_1 + \sigma_H \sqrt{\tau})}_{\alpha_1}; \underbrace{(\ln \frac{V}{H} - \frac{1}{2} \sigma^2 \tau) / (\sigma \sqrt{\tau})}_{\alpha_2}; \underbrace{(\rho_{VH} \sigma_V - \sigma_H) / \sigma}_{\rho_c} \right) \\
 & + VN_2 \left(\underbrace{(\gamma_2 + \sigma_V \sqrt{\tau})}_{\beta_1}; \underbrace{(\ln \frac{H}{V} - \frac{1}{2} \sigma^2 \tau) / (\sigma \sqrt{\tau})}_{\beta_2}; \underbrace{(\rho_{VH} \sigma_H - \sigma_V) / \sigma}_{\rho_c} \right) \\
 & - Fe^{-r_f \tau} N_2(\gamma_1; \gamma_2; \rho_{VH})
 \end{aligned}$$

Ici $N_2(a, b, c)$ une fonction normale cumulative bivariée avec les limites d'intégration supérieures a, b et le coefficient de corrélation linéaire c . Avec :

$$\gamma_1 = \frac{\ln \frac{H}{F} + (r_f - \frac{1}{2} \sigma_H^2) \tau}{\sigma_H \sqrt{\tau}},$$

$$\gamma_2 = \frac{\ln \frac{V}{F} + (r_f - \frac{1}{2} \sigma_V^2) \tau}{\sigma_V \sqrt{\tau}}$$

et

$$\sigma^2 = \sigma_V^2 + \sigma_H^2 - 2\rho_{VH} \sigma_V \sigma_H.$$

Ainsi,

$$M(V, H, F, \tau) = HN_2(\alpha_1, \alpha_2, \rho_c) + VN_2(\beta_1, \beta_2, \rho_c) - Fe^{-r_f \tau} N_2(\gamma_1, \gamma_2, \rho_{VH}) \quad (\text{B.8})$$

B.2 Call on max

Le paiement de cette option est donné par

$$MX(V, H, F, \tau) = \max(\max(V, H) - F, 0).$$

La valeur de cette option nous est fournie par la relation suivante :

$$MX(V, H, F, \tau) = C(V, F, \tau) + C(H, F, \tau) - M(V, H, F, \tau), \quad (\text{B.9})$$

où $C(A, F, \tau)$ est une option d'achat sur l'actif A avec un prix d'exercice de F dont l'échéance est de τ . Nous pouvons vérifier ce résultat par le raisonnement suivant : si $V, V \geq H$, l'option $C(V, F, \tau)$ à l'échéance paie $V - F$, l'option $C(H, F, \tau)$ à l'échéance paie $H - F$, et le *short call* sur le minimum des deux actifs coûte $H - F$. En appliquant le même raisonnement pour $H \geq V$ à l'échéance on peut voir que $MX(V, H, F, \tau)$ donne le maximum des deux actifs.

B.3 Put on min

Le paiement de cette option est donné par :

$$PM(V, H, F, \tau) = \max(F - \min(V, H), 0).$$

La valeur de cette option est fournie par la relation suivante :

$$PM(V, H, F, \tau) = e^{-r_f \tau} F - M(V, H, 0, \tau) + M(V, H, F, \tau). \quad (\text{B.10})$$

Ce résultat se vérifie par la comparaison des portefeuilles A et B décrits plus bas :

Portefeuille A L'achat d'un *put* sur le minimum de V ou H avec un prix d'exercice de F .

Portefeuille B L'achat d'une obligation à escompte qui paie F à l'échéance. Écrire un *call* sur le minimum de V ou de H avec un prix d'exercice de 0.

Acheter un *call* sur le minimum de V ou H avec un prix d'exercice de F .

À l'échéance

1. Si $\min(V, H) \geq F$, le portefeuille A paie 0. Le portefeuille B paie :
 $F - \min(V, H) + \min(V, H) - F = 0$.
2. Si $\min(V, H) = V < F$, le portefeuille A paie $F - V$, le portefeuille B paie
 $F - V + 0 = F - V$.
3. Si $\min(V, H) = H < F$, le portefeuille A paie $F - H$, le portefeuille B paie
 $F - H + 0 = F - H$.

B.4 Put on max

Le paiement de cette option est donné par

$$PX(V, H, F, \tau) = \max(F - \max(V, H), 0).$$

La valeur de cette option est fournie par la relation suivante :

$$PX(V, H, F, \tau) = e^{-r_f \tau} F - MX(V, H, 0, \tau) + MX(V, H, F, \tau). \quad (\text{B.11})$$

Le raisonnement est similaire à une option de vente sur le minimum de deux actifs.

Annexe C

VALORISATION D'OPTIONS À PARTIR DES FONCTIONS COPULES

C.1 Comparaison avec la méthode de Stulz

Dans cette annexe nous présentons les résultats plus complets de la valorisation des options avec la méthodologie des copules. Dans un premier temps les valeurs d'options sur deux actifs sous-jacents sont comparées avec la méthodologie de Stulz, rappelons-le, qui est aussi sur deux actifs sous-jacents. Dans cette démarche nous remarquons que les valeurs obtenues par les copules sont assez près de celles obtenues par l'algorithme de Stulz. Nous remarquons aussi que les valeurs sont plus rapprochées entre les deux méthodologies pour des échéances est plus courtes.

TAB. C.1 – Valeur d’une option sur deux sous-jacents Canada et France échéance un mois.

Prix de levée	ÉCHÉANCE 1 MOIS τ de Kendall = 0.326, ρ = 0.490						
	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.15
	COPULES GAUSSIENNES						
Call on Max	0.1735	0.1293	0.0809	0.0383	0.0155	0.0039	0.0011
Call on Min	0.1199	0.0772	0.0383	0.0120	0.0025	0.0003	0.0000
Put on Min	0.0007	0.0035	0.0130	0.0384	0.0780	0.1264	0.1753
Put on Max	0.0001	0.0002	0.0023	0.0123	0.0360	0.0759	0.1214
	MÉTHODOLOGIE DE STULZ						
Call on Max	0.1854	0.1362	0.0899	0.0511	0.02422	0.0094	0.0030
Call on Min	0.1213	0.0397	0.0397	0.0167	0.00537	0.0014	0.0003
Put on Min	0.0056	0.0192	0.0192	0.0459	0.0845	0.1303	0.1791
Put on Max	0.0007	0.0043	0.0043	0.0153	0.0382	0.0733	0.1167

TAB. C.2 – Valeur d'une option sur deux sous-jacents Canada et France échéance trois mois.

Prix de levée	ÉCHÉANCE 3 MOIS						
	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.15
	COPULES GAUSSIENNES						
Call on Max	0.1981	0.1527	0.1080	0.0747	0.0399	0.0247	0.0103
Call on Min	0.1086	0.0721	0.0414	0.0231	0.0087	0.0035	0.0008
Put on Min	0.0076	0.0175	0.0372	0.0683	0.1056	0.1519	0.1988
Put on Max	0.0005	0.0027	0.0080	0.0219	0.0418	0.0745	0.1151
	MÉTHODOLOGIE DE STULZ						
Call on Max	0.2164	0.1703	0.1282	0.0917	0.0623	0.0400	0.0242
Call on Min	0.1137	0.0777	0.0495	0.0294	0.0162	0.0083	0.0040
Put on Min	0.0118	0.0258	0.0466	0.0760	0.1123	0.1540	0.1992
Put on Max	0.0018	0.0052	0.0126	0.0256	0.0456	0.0729	0.1068

TAB. C.3 – Valeur d'une option sur deux sous-jacents Canada et France échéance six mois.

Prix de levée	ÉCHÉANCE 6 MOIS						
	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.15
	COPULES GAUSSIENNES						
Call on Max	0.2226	0.1804	0.1364	0.0989	0.0630	0.0470	0.0302
Call on Min	0.1040	0.0759	0.0482	0.0293	0.0137	0.0096	0.0051
Put on Min	0.0214	0.0389	0.0618	0.0961	0.1396	0.1762	0.2190
Put on Max	0.0031	0.0066	0.0171	0.0315	0.0564	0.0790	0.1192
	MÉTHODOLOGIE DE STULZ						
Call on Max	0.2519	0.2087	0.1692	0.1340	0.1037	0.0785	0.0582
Call on Min	0.1160	0.0857	0.0612	0.0424	0.0285	0.0186	0.0118
Put on Min	0.0292	0.0479	0.0724	0.1026	0.1377	0.1768	0.2191
Put on Max	0.0057	0.0116	0.0211	0.0349	0.0537	0.0775	0.1062

TAB. C.4 – Valeur d’une option sur deux sous-jacents Canada et France échéance un an.

Prix de levée	ÉCHÉANCE 1 AN						
	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.15
	COPULES GAUSSIENNES						
Call on Max	0.2593	0.2156	0.1671	0.1371	0.1090	0.0788	0.0735
Call on Min	0.1053	0.0790	0.0551	0.0441	0.0275	0.0172	0.0124
Put on Min	0.0454	0.0715	0.1081	0.1329	0.1615	0.2122	0.2438
Put on Max	0.0073	0.0173	0.0321	0.0485	0.0618	0.0920	0.1149
	MÉTHODOLOGIE DE STULZ						
Call on Max	0.3084	0.2685	0.2314	0.1976	0.1672	0.1402	0.1167
Call on Min	0.1264	0.1007	0.0614	0.0614	0.0471	0.0358	0.0269
Put on Min	0.0562	0.0785	0.1354	0.1354	0.1692	0.2059	0.2451
Put on Max	0.0133	0.0214	0.0467	0.0467	0.0643	0.0855	0.1100

C.2 Options sur six actifs sous-jacents

Dans cette section nous trouvons les valeurs d'options sur six actifs sous-jacents, pour plusieurs prix de levées et pour différentes échéances. Les six sous-jacents sont les marchés des actions des pays suivants :

1. Canada,
2. France,
3. Allemagne,
4. Angleterre,
5. Japon et
6. États-Unis.

Les options sont valorisées selon les copules

1. Gaussienne,
2. Clayton,
3. Gumbel et
4. Frank.

TAB. C.5 – Valeur d’une option sur six actifs sous-jacents Canada, France, Allemagne, Angleterre, Japon et États-Unis échéance un mois.

Prix de levée	ÉCHÉANCE 1 MOIS						
	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.15
	COPULES GAUSSIENNES						
Call on Max	0.2144	0.1680	0.1131	0.0711	0.0334	0.0137	0.0042
Call on Min	0.0889	0.0478	0.0167	0.0039	0.0002	0.0000	0.0000
Put on Min	0.0024	0.0102	0.0323	0.0674	0.1149	0.1630	0.2145
Put on Max	0.0000	0.0000	0.0003	0.0038	0.0168	0.0471	0.0897
	COPULES DE CLAYTON						
Call on Max	0.2287	0.1752	0.1260	0.0797	0.0360	0.0145	0.0035
Call on Min	0.0820	0.0420	0.0123	0.0014	0.0000	0.0000	0.0000
Put on Min	0.0025	0.0096	0.0331	0.0686	0.1193	0.1717	0.2205
Put on Max	0.0000	0.0000	0.0000	0.0015	0.0119	0.0391	0.0800
	COPULES DE GUMBEL						
Call on Max	0.2188	0.1750	0.1210	0.0725	0.0355	0.0118	0.0021
Call on Min	0.0802	0.0420	0.0121	0.0017	0.0002	0.0000	0.0000
Put on Min	0.0027	0.0100	0.0369	0.0758	0.1227	0.1743	0.2224
Put on Max	0.0000	0.0000	0.0001	0.0013	0.0128	0.0386	0.0829
	COPULES DE FRANK						
Call on Max	0.2230	0.1731	0.1269	0.0774	0.0395	0.0135	0.0033
Call on Min	0.0785	0.0384	0.0123	0.0014	0.0000	0.0000	0.0000
Put on Min	0.0035	0.0117	0.0346	0.0736	0.1191	0.1728	0.2242
Put on Max	0.0000	0.0000	0.0000	0.0012	0.0100	0.0396	0.0797

TAB. C.6 – Valeur d'une option sur six actifs sous-jacents Canada, France, Allemagne, Angleterre, Japon et États-Unis échéance trois mois.

Prix de levée	ÉCHÉANCE 3 MOIS						
	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.15
	COPULES GAUSSIENNES						
Call on Max	0.2664	0.2212	0.1673	0.1171	0.0805	0.0543	0.0296
Call on Min	0.0615	0.0352	0.0144	0.0057	0.0019	0.0004	0.0000
Put on Min	0.0224	0.0457	0.0736	0.1204	0.1611	0.2077	0.2645
Put on Max	0.0001	0.0004	0.0013	0.0068	0.0168	0.0368	0.0657
	COPULES DE CLAYTON						
Call on Max	0.2848	0.2265	0.1833	0.1335	0.0963	0.0562	0.0340
Call on Min	0.0512	0.0242	0.0096	0.0024	0.0004	0.0001	0.0000
Put on Min	0.0253	0.0481	0.0790	0.1261	0.1674	0.2237	0.2682
Put on Max	0.0000	0.0002	0.0008	0.0037	0.0104	0.0284	0.0519
	COPULES DE GUMBEL						
Call on Max	0.2852	0.2262	0.1855	0.1355	0.0839	0.0542	0.0308
Call on Min	0.0492	0.0230	0.0111	0.0032	0.0011	0.0002	0.0000
Put on Min	0.0240	0.0499	0.0867	0.1289	0.1756	0.2231	0.2788
Put on Max	0.0000	0.0001	0.0006	0.0029	0.0093	0.0250	0.0550
	COPULES DE FRANK						
Call on Max	0.2804	0.2354	0.1850	0.1282	0.0988	0.0541	0.0321
Call on Min	0.0488	0.0254	0.0097	0.0024	0.0008	0.0000	0.0000
Put on Min	0.0258	0.0504	0.0859	0.1315	0.1739	0.2295	0.2784
Put on Max	0.0000	0.0000	0.0005	0.0034	0.0097	0.0267	0.0514

TAB. C.7 – Valeur d'une option sur six actifs sous-jacents Canada, France, Allemagne, Angleterre, Japon et États-Unis échéance six mois.

Prix de levée	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.15
ÉCHÉANCE 6 MOIS							
COPULES GAUSSIENNES							
Call on Max	0.3233	0.2699	0.2219	0.1798	0.1445	0.0996	0.0764
Call on Min	0.0513	0.0291	0.0162	0.0082	0.0041	0.0015	0.0007
Put on Min	0.0533	0.0873	0.1198	0.1572	0.2019	0.2578	0.3067
Put on Max	0.0006	0.0015	0.0039	0.0092	0.0184	0.0343	0.0576
COPULES DE CLAYTON							
Call on Max	0.3456	0.2904	0.2516	0.1977	0.1563	0.1225	0.0845
Call on Min	0.0378	0.0205	0.0084	0.0046	0.0019	0.0005	0.0000
Put on Min	0.0603	0.0892	0.1300	0.1745	0.2205	0.2716	0.3197
Put on Max	0.0003	0.0005	0.0020	0.0051	0.0093	0.0230	0.0366
COPULES DE GUMBEL							
Call on Max	0.3457	0.2829	0.2374	0.2010	0.1524	0.1096	0.0860
Call on Min	0.0403	0.0176	0.0094	0.0043	0.0017	0.0004	0.0001
Put on Min	0.0595	0.0974	0.1433	0.1779	0.2266	0.2738	0.3248
Put on Max	0.0001	0.0006	0.0011	0.0047	0.0117	0.0237	0.0420
COPULES DE FRANK							
Call on Max	0.3435	0.2852	0.2516	0.2019	0.1593	0.1155	0.0860
Call on Min	0.0359	0.0143	0.0073	0.0038	0.0019	0.0001	0.0000
Put on Min	0.0598	0.0992	0.1384	0.1796	0.2259	0.2836	0.3244
Put on Max	0.0000	0.0006	0.0011	0.0043	0.0105	0.0211	0.0359

TAB. C.8 – Valeur d’une option sur six actifs sous-jacents Canada, France, Allemagne, Angleterre, Japon et États-Unis échéance un an.

Prix de levée	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.15
	ÉCHÉANCE 1 AN						
	COPULES GAUSSIENNES						
Call on Max	0.3973	0.3518	0.3051	0.2608	0.2152	0.1744	0.1550
Call on Min	0.0419	0.0292	0.0177	0.0114	0.0046	0.0032	0.0017
Put on Min	0.1078	0.1410	0.1780	0.2283	0.2789	0.3227	0.3605
Put on Max	0.0021	0.0045	0.0068	0.0151	0.0253	0.0402	0.0541
	COPULES DE CLAYTON						
Call on Max	0.4330	0.3921	0.3114	0.2910	0.2454	0.2084	0.1742
Call on Min	0.0256	0.0187	0.0083	0.0047	0.0018	0.0008	0.0003
Put on Min	0.1167	0.1547	0.2035	0.2349	0.2923	0.3353	0.3872
Put on Max	0.0007	0.0010	0.0054	0.0093	0.0152	0.0234	0.0389
	COPULES DE GUMBEL						
Call on Max	0.4238	0.3679	0.3155	0.2946	0.2480	0.1932	0.1638
Call on Min	0.0259	0.0174	0.0096	0.0056	0.0033	0.0017	0.0005
Put on Min	0.1235	0.1520	0.1970	0.2415	0.2901	0.3426	0.3913
Put on Max	0.0003	0.0015	0.0039	0.0058	0.0137	0.0232	0.0402
	COPULES DE FRANK						
Call on Max	0.4345	0.3910	0.3317	0.2948	0.2432	0.1920	0.1623
Call on Min	0.0253	0.0195	0.0074	0.0042	0.0014	0.0006	0.0005
Put on Min	0.1171	0.1511	0.1992	0.2451	0.3019	0.3514	0.4045
Put on Max	0.0002	0.0011	0.0033	0.0055	0.0129	0.0226	0.0383

TAB. C.9 – Valeur d’une option sur six actifs sous-jacents Canada, France, Allemagne, Angleterre, Japon et États-Unis échéance un mois.

Prix de levée	ÉCHÉANCE 1 MOIS						
	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.15
	COPULES GAUSSIENNES						
Call on Max	0.2142	0.1678	0.1128	0.0709	0.0334	0.0139	0.0044
Call on Min	0.0894	0.0480	0.0165	0.0038	0.0002	0.0000	0.0000
Put on Min	0.0021	0.0096	0.0314	0.0664	0.1141	0.1622	0.2136
Put on Max	0.0000	0.0000	0.0002	0.0038	0.0170	0.0474	0.0900
	COPULES DE CLAYTON						
Call on Max	0.2249	0.1745	0.1254	0.0783	0.0362	0.0147	0.0041
Call on Min	0.0837	0.0426	0.0129	0.0019	0.0000	0.0000	0.0000
Put on Min	0.0026	0.0089	0.0322	0.0670	0.1186	0.1695	0.2196
Put on Max	0.0000	0.0000	0.0001	0.0013	0.0121	0.0396	0.0797
	COPULES DE GUMBEL						
Call on Max	0.2213	0.1715	0.1219	0.0735	0.0343	0.0128	0.0048
Call on Min	0.0812	0.0402	0.0114	0.0021	0.0001	0.0000	0.0000
Put on Min	0.0023	0.0121	0.0338	0.0736	0.1222	0.1696	0.2186
Put on Max	0.0000	0.0000	0.0001	0.0014	0.0129	0.0389	0.0818
	COPULES DE FRANK						
Call on Max	0.2226	0.1751	0.1268	0.0760	0.0385	0.0147	0.0046
Call on Min	0.0807	0.0412	0.0115	0.0016	0.0001	0.0000	0.0000
Put on Min	0.0029	0.0107	0.0334	0.0706	0.1214	0.1699	0.2215
Put on Max	0.0000	0.0000	0.0000	0.0013	0.0109	0.0400	0.0803

TAB. C.10 – Valeur d’une option sur six actifs sous-jacents Canada, France, Allemagne, Angleterre, Japon et États-Unis échéance trois mois.

Prix de levée	ÉCHÉANCE 3 MOIS						
	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.15
	COPULES GAUSSIENNES						
Call on Max	0.2651	0.2200	0.1661	0.1158	0.0796	0.0536	0.0292
Call on Min	0.0620	0.0352	0.0142	0.0055	0.0018	0.0003	0.0000
Put on Min	0.0208	0.0434	0.0713	0.1178	0.1588	0.2054	0.2621
Put on Max	0.0001	0.0004	0.0012	0.0067	0.0169	0.0373	0.0664
	COPULES DE CLAYTON						
Call on Max	0.2813	0.2258	0.1827	0.1308	0.0970	0.0545	0.0350
Call on Min	0.0537	0.0255	0.0101	0.0021	0.0006	0.0000	0.0000
Put on Min	0.0223	0.0467	0.0750	0.1216	0.1663	0.2205	0.2647
Put on Max	0.0000	0.0002	0.0010	0.0037	0.0114	0.0282	0.0532
	COPULES DE GUMBEL						
Call on Max	0.2778	0.2233	0.1850	0.1333	0.0857	0.0561	0.0328
Call on Min	0.0546	0.0232	0.0116	0.0026	0.0009	0.0001	0.0000
Put on Min	0.0230	0.0509	0.0808	0.1233	0.1724	0.2200	0.2720
Put on Max	0.0000	0.0000	0.0003	0.0026	0.0110	0.0263	0.0538
	COPULES DE FRANK						
Call on Max	0.2774	0.2269	0.1833	0.1258	0.0972	0.0585	0.0374
Call on Min	0.0489	0.0241	0.0101	0.0020	0.0006	0.0001	0.0000
Put on Min	0.0259	0.0517	0.0818	0.1269	0.1709	0.2209	0.2720
Put on Max	0.0000	0.0001	0.0005	0.0032	0.0084	0.0260	0.0503

TAB. C.11 – Valeur d'une option sur six actifs sous-jacents Canada, France, Allemagne, Angleterre, Japon et États-Unis échéance six mois.

Prix de levée	ÉCHÉANCE 6 MOIS						
	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.15
	COPULES GAUSSIENNES						
Call on Max	0.3208	0.2674	0.2195	0.1773	0.1419	0.0973	0.0747
Call on Min	0.0517	0.0291	0.0160	0.0079	0.0038	0.0013	0.0007
Put on Min	0.0501	0.0833	0.1158	0.1532	0.1980	0.2538	0.3027
Put on Max	0.0005	0.0013	0.0037	0.0089	0.0183	0.0345	0.0581
	COPULES DE CLAYTON						
Call on Max	0.3398	0.2884	0.2454	0.1915	0.1543	0.1122	0.0852
Call on Min	0.0386	0.0207	0.0082	0.0031	0.0017	0.0002	0.0000
Put on Min	0.0559	0.0841	0.1231	0.1697	0.2169	0.2653	0.3126
Put on Max	0.0002	0.0003	0.0017	0.0051	0.0104	0.0240	0.0393
	COPULES DE GUMBEL						
Call on Max	0.3428	0.2783	0.2303	0.1862	0.1532	0.1121	0.0766
Call on Min	0.0397	0.0178	0.0101	0.0037	0.0021	0.0010	0.0002
Put on Min	0.0529	0.0959	0.1320	0.1728	0.2190	0.2668	0.3177
Put on Max	0.0000	0.0003	0.0014	0.0042	0.0104	0.0236	0.0418
	COPULES DE FRANK						
Call on Max	0.3406	0.2945	0.2388	0.1875	0.1618	0.1109	0.0810
Call on Min	0.0378	0.0192	0.0079	0.0027	0.0015	0.0002	0.0000
Put on Min	0.0576	0.0919	0.1316	0.1803	0.2154	0.2758	0.3207
Put on Max	0.0001	0.0003	0.0016	0.0041	0.0091	0.0233	0.0379

TAB. C.12 – Valeur d’une option sur six actifs sous-jacents Canada, France, Allemagne, Angleterre, Japon et États-Unis échéance un an.

Prix de levée	ÉCHÉANCE 1 AN						
	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.15
	COPULES GAUSSIENNES						
Call on Max	0.3929	0.3474	0.3004	0.2562	0.2106	0.1700	0.1510
Call on Min	0.0422	0.0293	0.0175	0.0110	0.0044	0.0029	0.0016
Put on Min	0.1023	0.1352	0.1721	0.2220	0.2725	0.3164	0.3543
Put on Max	0.0019	0.0042	0.0064	0.0146	0.0247	0.0398	0.0542
	COPULES DE CLAYTON						
Call on Max	0.4256	0.3880	0.3083	0.2858	0.2344	0.2010	0.1643
Call on Min	0.0262	0.0178	0.0077	0.0056	0.0017	0.0009	0.0003
Put on Min	0.1118	0.1466	0.1969	0.2323	0.2865	0.3319	0.3809
Put on Max	0.0006	0.0011	0.0048	0.0079	0.0151	0.0255	0.0391
	COPULES DE GUMBEL						
Call on Max	0.4199	0.3681	0.3189	0.2724	0.2445	0.1977	0.1617
Call on Min	0.0291	0.0170	0.0099	0.0051	0.0034	0.0013	0.0007
Put on Min	0.1127	0.1537	0.1940	0.2377	0.2759	0.3348	0.3788
Put on Max	0.0008	0.0010	0.0032	0.0087	0.0141	0.0219	0.0383
	COPULES DE FRANK						
Call on Max	0.4269	0.3734	0.3321	0.2885	0.2395	0.2069	0.1714
Call on Min	0.0271	0.0169	0.0090	0.0056	0.0031	0.0009	0.0004
Put on Min	0.1103	0.1513	0.1920	0.2338	0.2913	0.3394	0.3877
Put on Max	0.0003	0.0010	0.0027	0.0065	0.0148	0.0245	0.0342

TAB. C.13 – Valeur d'une option sur six actifs sous-jacents Canada, France, Allemagne, Angleterre, Japon et États-Unis échéance un mois.

Prix de levée	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.15
	ÉCHÉANCE 1 MOIS						
	COPULES GAUSSIENNES						
Call on Max	0.2144	0.1680	0.1131	0.0711	0.0334	0.0137	0.0042
Call on Min	0.0889	0.0478	0.0167	0.0039	0.0002	0.0000	0.0000
Put on Min	0.0024	0.0102	0.0323	0.0674	0.1149	0.1630	0.2145
Put on Max	0.0000	0.0000	0.0003	0.0038	0.0168	0.0471	0.0897
	SIMULATIONS MONTÉ-CARLO						
Call on Max	0.2039	0.1541	0.1044	0.0572	0.0214	0.0053	0.0007
Call on Min	0.1067	0.0589	0.0215	0.0040	0.0004	0.0000	0.0000
Put on Min	0.0001	0.0021	0.0146	0.0472	0.0933	0.1426	0.1926
Put on Max	0.0000	0.0000	0.0001	0.0032	0.0172	0.0506	0.0963

TAB. C.14 – Valeur d’une option sur six actifs sous-jacents Canada, France, Allemagne, Angleterre, Japon et États-Unis échéance trois mois.

Prix de levée	ÉCHÉANCE 3 MOIS						
	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.15
	COPULES GAUSSIENNES						
Call on Max	0.2664	0.2212	0.1673	0.1171	0.0805	0.0543	0.0296
Call on Min	0.0615	0.0352	0.0144	0.0057	0.0019	0.0004	0.0000
Put on Min	0.0224	0.0457	0.0736	0.1204	0.1611	0.2077	0.2645
Put on Max	0.0001	0.0004	0.0013	0.0068	0.0168	0.0368	0.0657
	SIMULATIONS MONTÉ-CARLO						
Call on Max	0.2472	0.1986	0.1495	0.1039	0.0644	0.0352	0.0170
Call on Min	0.0839	0.0467	0.0210	0.0076	0.0022	0.0006	0.0001
Put on Min	0.0051	0.0171	0.0409	0.0770	0.1211	0.1690	0.2180
Put on Max	0.0000	0.0001	0.0008	0.0044	0.0144	0.0347	0.0660

TAB. C.15 – Valeur d’une option sur six actifs sous-jacents Canada, France, Allemagne, Angleterre, Japon et États-Unis échéance six mois.

Prix de levée	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.15
	ÉCHÉANCE 6 MOIS						
	COPULES GAUSSIENNES						
Call on Max	0.3233	0.2699	0.2219	0.1798	0.1445	0.0996	0.0764
Call on Min	0.0513	0.0291	0.0162	0.0082	0.0041	0.0015	0.0007
Put on Min	0.0533	0.0873	0.1198	0.1572	0.2019	0.2578	0.3067
Put on Max	0.0006	0.0015	0.0039	0.0092	0.0184	0.0343	0.0576
	SIMULATIONS MONTÉ-CARLO						
Call on Max	0.2949	0.2462	0.1987	0.1535	0.1128	0.0783	0.0514
Call on Min	0.0732	0.0440	0.0236	0.0114	0.0050	0.0021	0.0006
Put on Min	0.0180	0.0373	0.0658	0.1027	0.1453	0.1913	0.2395
Put on Max	0.0000	0.0004	0.0018	0.0057	0.0140	0.0285	0.0504

TAB. C.16 – Valeur d’une option sur six actifs sous-jacents Canada, France, Allemagne, Angleterre, Japon et États-Unis échéance un an.

Prix de levée	ÉCHÉANCE 1 AN						
	0.85	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10	1.15
	COPULES GAUSSIENNES						
Call on Max	0.3973	0.3518	0.3051	0.2608	0.2152	0.1744	0.1550
Call on Min	0.0419	0.0292	0.0177	0.0114	0.0046	0.0032	0.0017
Put on Min	0.1078	0.1410	0.1780	0.2283	0.2789	0.3227	0.3605
Put on Max	0.0021	0.0045	0.0068	0.0151	0.0253	0.0402	0.0541
	SIMULATIONS MONTÉ-CARLO						
Call on Max	0.3625	0.3203	0.2743	0.2301	0.1890	0.1515	0.1187
Call on Min	0.0695	0.0459	0.0289	0.0174	0.0101	0.0056	0.0031
Put on Min	0.0409	0.0654	0.0965	0.1330	0.1737	0.2172	0.2628
Put on Max	0.0003	0.0011	0.0031	0.0071	0.0140	0.0245	0.0398

Annexe D

VALORISATION D'OPTIONS SUR PLUS D'UN ACTIF SOUS-JACENTS PAR SIMULATIONS DE MONTE CARLO

Les valeurs d'options sur un panier de titres dont les rendements sont corrélés par la matrice des corrélations Ω sont calculées par la méthodologie suivante :

$$\Omega_{d \times d} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \dots & \rho_{1d} \\ \rho_{21} & 1 & \dots & \rho_{2d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{d1} & \rho_{d2} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Étapes de la démarche :

1. Calculer la décomposition de Cholesky de Ω ,
2. Générer une matrice $n \times n$ de nombres aléatoires iid selon une loi $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$\mathbf{E}_{d \times n} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \dots & \epsilon_{1,n} \\ \epsilon_{21} & \dots & \epsilon_{2,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \epsilon_{d1} & \dots & \epsilon_{d,n} \end{pmatrix},$$

3. Produire les rendements des d actifs corrélés selon Ω par :

$$\mathbf{R}_{d \times n} = \text{Chol}(\Omega_{d \times d}) \mathbf{E}_{d \times n}.$$

Nous obtenons un vecteur de rendements pour n simulations pour les d actifs sous-jacents,

4. Pour chaque simulation ou observation nous calculons la valeur de S_T pour les d actifs financiers par :

$$S_{i,k} = S_{i,0} \exp \left((r_f - \sigma_i^2/2)T + \sigma_i \sqrt{T} R_{id} \right), \quad i = 1, \dots, d, \quad k = 1, \dots, n, \quad (\text{D.1})$$

5. Pour chaque simulation calculer la valeur minimum et maximum pour les d actifs :

$$\max_i = \max(S_{i,k}), \quad i = 1, \dots, d, \quad k = 1, \dots, n$$

et

$$\min_i = \min(S_{i,k}), \quad i = 1, \dots, d, \quad k = 1, \dots, n,$$

6. Pour chaque observation calculer les valeurs des options :

$$\text{callMin}_i = \max(\min_i - X_i, 0),$$

$$\text{callMax}_i = \max(\max_i - X_i, 0),$$

$$\text{putMin}_i = \max(X_i - \min_i, 0),$$

$$\text{putMax}_i = \max(X_i - \max_i, 0),$$

7. Pour chaque option calculer l'espérance actualisée :

$$\text{call on min} = e^{-r_f \times T} \mathbb{E}[\text{callMin}_i],$$

$$\text{call on max} = e^{-r_f \times T} \mathbb{E}[\text{callMax}_i],$$

$$\text{put on min} = e^{-r_f \times T} \mathbb{E}[\text{putMin}_i],$$

$$\text{put on max} = e^{-r_f \times T} \mathbb{E}[\text{putMax}_i].$$

Annexe E

COMBINAISONS DE FONDS DE COUVERTURE

Dans cet appendice nous retrouvons quelques combinaisons de fonds de couverture avec un portefeuille diversifié, quelques fonds de couverture entre eux et finalement certains fonds de couverture combinés avec un portefeuille d'obligations.

TAB. E.1 - *Portefeuille et Fonds de Fonds*

(a)

$$C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq \mathbf{u}_1, U_2 \leq \mathbf{u}_2]$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.030	0.045	0.061	0.083	0.083	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098
0.2	0.053	0.076	0.106	0.136	0.136	0.159	0.182	0.189	0.197	0.197
0.3	0.076	0.121	0.182	0.212	0.220	0.250	0.280	0.288	0.295	0.295
0.4	0.098	0.152	0.220	0.265	0.280	0.326	0.364	0.386	0.402	0.402
0.5	0.098	0.167	0.235	0.295	0.341	0.394	0.439	0.462	0.492	0.500
0.6	0.098	0.174	0.250	0.311	0.364	0.439	0.508	0.538	0.568	0.598
0.7	0.098	0.182	0.265	0.341	0.402	0.485	0.576	0.621	0.674	0.705
0.8	0.098	0.197	0.280	0.364	0.432	0.523	0.621	0.689	0.742	0.803
0.9	0.098	0.197	0.295	0.394	0.485	0.583	0.682	0.773	0.833	0.902
1.0	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.598	0.705	0.803	0.902	1.000

(b)

$$c(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{\partial^2 C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.030	0.030	0.015	0.015	0.008	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.030	0.023	0.000	0.008	0.030	0.008	0.000	0.000	0.000	0.000
0.3	0.008	0.023	0.023	0.023	0.000	0.015	0.008	0.000	0.000	0.000
0.4	0.015	0.008	0.038	0.008	0.023	0.008	0.000	0.000	0.000	0.008
0.5	0.008	0.000	0.015	0.015	0.023	0.008	0.030	0.000	0.000	0.000
0.6	0.000	0.000	0.008	0.008	0.008	0.023	0.023	0.023	0.008	0.000
0.7	0.000	0.008	0.000	0.008	0.000	0.023	0.015	0.015	0.023	0.015
0.8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.008	0.008	0.038	0.030	0.015
0.9	0.000	0.000	0.000	0.008	0.008	0.008	0.008	0.015	0.023	0.030
1.0	0.008	0.008	0.000	0.015	0.000	0.000	0.015	0.008	0.015	0.030

TAB. E.2 – *Portefeuille et Global Macro*

(a)

$$C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq \mathbf{u}_1, U_2 \leq \mathbf{u}_2]$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.038	0.045	0.068	0.068	0.076	0.083	0.098	0.098	0.098	0.098
0.2	0.068	0.091	0.121	0.136	0.167	0.174	0.189	0.189	0.197	0.197
0.3	0.083	0.121	0.174	0.205	0.242	0.265	0.288	0.288	0.295	0.295
0.4	0.083	0.136	0.197	0.242	0.295	0.341	0.379	0.386	0.402	0.402
0.5	0.083	0.159	0.235	0.295	0.348	0.394	0.455	0.485	0.500	0.500
0.6	0.083	0.167	0.250	0.318	0.386	0.439	0.515	0.561	0.598	0.598
0.7	0.083	0.167	0.265	0.333	0.409	0.485	0.561	0.629	0.689	0.705
0.8	0.083	0.167	0.265	0.341	0.417	0.508	0.606	0.697	0.773	0.803
0.9	0.091	0.174	0.273	0.364	0.455	0.553	0.659	0.758	0.841	0.902
1.0	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.598	0.705	0.803	0.902	1.000

(b)

$$c(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{\partial^2 C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}{\partial \mathbf{u}_1 \partial \mathbf{u}_2}$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.038	0.008	0.023	0.000	0.008	0.008	0.015	0.000	0.000	0.000
0.2	0.030	0.015	0.008	0.015	0.023	0.000	0.000	0.000	0.008	0.000
0.3	0.015	0.015	0.023	0.015	0.008	0.015	0.008	0.000	0.000	0.000
0.4	0.000	0.015	0.008	0.015	0.015	0.023	0.015	0.008	0.008	0.000
0.5	0.000	0.023	0.015	0.015	0.000	0.000	0.023	0.023	0.000	0.000
0.6	0.000	0.008	0.008	0.008	0.015	0.008	0.015	0.015	0.023	0.000
0.7	0.000	0.000	0.015	0.000	0.008	0.023	0.000	0.023	0.023	0.015
0.8	0.000	0.000	0.000	0.008	0.000	0.015	0.023	0.023	0.015	0.015
0.9	0.008	0.000	0.000	0.015	0.015	0.008	0.008	0.008	0.008	0.030
1.0	0.008	0.015	0.000	0.015	0.008	0.000	0.000	0.000	0.015	0.038

TAB. E.3 – *Portefeuille et Distress*

(a)

$$C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq \mathbf{u}_1, U_2 \leq \mathbf{u}_2]$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.038	0.061	0.076	0.076	0.083	0.083	0.083	0.091	0.091	0.098
0.2	0.038	0.083	0.106	0.106	0.121	0.136	0.144	0.159	0.167	0.197
0.3	0.061	0.106	0.136	0.167	0.189	0.227	0.242	0.258	0.265	0.295
0.4	0.076	0.136	0.182	0.250	0.288	0.333	0.348	0.364	0.371	0.402
0.5	0.083	0.152	0.212	0.295	0.341	0.402	0.424	0.462	0.470	0.500
0.6	0.091	0.159	0.242	0.333	0.394	0.470	0.500	0.545	0.568	0.598
0.7	0.091	0.159	0.242	0.333	0.409	0.492	0.553	0.621	0.667	0.705
0.8	0.091	0.159	0.242	0.348	0.439	0.530	0.606	0.682	0.742	0.803
0.9	0.098	0.167	0.265	0.371	0.470	0.568	0.667	0.750	0.826	0.902
1.0	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.598	0.705	0.803	0.902	1.000

(b)

$$c(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{\partial^2 C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.038	0.023	0.015	0.000	0.008	0.000	0.000	0.008	0.000	0.008
0.2	0.000	0.023	0.008	0.000	0.008	0.015	0.008	0.008	0.008	0.023
0.3	0.023	0.000	0.008	0.030	0.008	0.023	0.008	0.000	0.000	0.000
0.4	0.015	0.015	0.015	0.038	0.015	0.008	0.000	0.000	0.000	0.000
0.5	0.008	0.008	0.015	0.015	0.008	0.015	0.008	0.023	0.000	0.000
0.6	0.008	0.000	0.023	0.008	0.015	0.015	0.008	0.008	0.015	0.000
0.7	0.000	0.000	0.000	0.000	0.015	0.008	0.030	0.023	0.023	0.008
0.8	0.000	0.000	0.000	0.015	0.015	0.008	0.015	0.008	0.015	0.023
0.9	0.008	0.000	0.015	0.000	0.008	0.008	0.023	0.008	0.015	0.015
1.0	0.000	0.030	0.000	0.000	0.000	0.000	0.008	0.015	0.023	0.023

TAB. E.4 – *Portefeuille et Equity Hedge*

(a)

$$C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq \mathbf{u}_1, U_2 \leq \mathbf{u}_2]$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.045	0.068	0.076	0.091	0.091	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098
0.2	0.091	0.129	0.152	0.174	0.189	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197
0.3	0.091	0.152	0.220	0.258	0.273	0.288	0.295	0.295	0.295	0.295
0.4	0.098	0.189	0.265	0.333	0.364	0.386	0.394	0.402	0.402	0.402
0.5	0.098	0.197	0.280	0.379	0.424	0.455	0.477	0.500	0.500	0.500
0.6	0.098	0.197	0.288	0.394	0.470	0.523	0.561	0.591	0.598	0.598
0.7	0.098	0.197	0.295	0.402	0.477	0.553	0.614	0.659	0.689	0.705
0.8	0.098	0.197	0.295	0.402	0.485	0.576	0.659	0.720	0.773	0.803
0.9	0.098	0.197	0.295	0.402	0.492	0.583	0.674	0.765	0.848	0.902
1.0	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.598	0.705	0.803	0.902	1.000

(b)

$$c(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{\partial^2 C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.045	0.023	0.008	0.015	0.000	0.008	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.045	0.015	0.015	0.008	0.015	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.3	0.000	0.023	0.045	0.015	0.000	0.008	0.008	0.000	0.000	0.000
0.4	0.008	0.030	0.008	0.030	0.015	0.008	0.000	0.008	0.000	0.000
0.5	0.000	0.008	0.008	0.030	0.015	0.008	0.015	0.015	0.000	0.000
0.6	0.000	0.000	0.008	0.008	0.030	0.023	0.015	0.008	0.008	0.000
0.7	0.000	0.000	0.008	0.000	0.000	0.023	0.023	0.015	0.023	0.015
0.8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.008	0.015	0.023	0.015	0.023	0.015
0.9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.008	0.000	0.008	0.030	0.030	0.023
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.008	0.008	0.015	0.008	0.015	0.045

TAB. E.5 – *Portefeuille et Equity Market Neutral*

(a)

$$C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq \mathbf{u}_1, U_2 \leq \mathbf{u}_2]$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.038	0.083	0.091	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098
0.2	0.068	0.129	0.159	0.182	0.189	0.189	0.189	0.197	0.197	0.197
0.3	0.083	0.167	0.220	0.258	0.273	0.288	0.288	0.295	0.295	0.295
0.4	0.098	0.189	0.258	0.318	0.356	0.371	0.371	0.394	0.402	0.402
0.5	0.098	0.197	0.265	0.348	0.402	0.424	0.462	0.492	0.500	0.500
0.6	0.098	0.197	0.280	0.379	0.447	0.508	0.553	0.583	0.598	0.598
0.7	0.098	0.197	0.288	0.394	0.477	0.553	0.614	0.674	0.689	0.705
0.8	0.098	0.197	0.288	0.394	0.485	0.576	0.652	0.727	0.773	0.803
0.9	0.098	0.197	0.288	0.394	0.492	0.591	0.682	0.758	0.841	0.902
1.0	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.598	0.705	0.803	0.902	1.000

(b)

$$c(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{\partial^2 C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.038	0.045	0.008	0.008	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.030	0.015	0.023	0.015	0.008	0.000	0.000	0.008	0.000	0.000
0.3	0.015	0.023	0.023	0.015	0.008	0.015	0.000	0.000	0.000	0.000
0.4	0.015	0.008	0.015	0.023	0.023	0.000	0.000	0.015	0.008	0.000
0.5	0.000	0.008	0.000	0.023	0.015	0.008	0.038	0.008	0.000	0.000
0.6	0.000	0.000	0.015	0.015	0.015	0.038	0.008	0.000	0.008	0.000
0.7	0.000	0.000	0.008	0.008	0.015	0.015	0.015	0.030	0.000	0.015
0.8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.008	0.015	0.015	0.015	0.030	0.015
0.9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.008	0.008	0.015	0.000	0.038	0.030
1.0	0.000	0.000	0.008	0.000	0.000	0.000	0.015	0.023	0.015	0.038

TAB. E.6 – *Portfeuille et Event Driven*

(a)

$$C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq \mathbf{u}_1, U_2 \leq \mathbf{u}_2]$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.061	0.068	0.068	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098
0.2	0.083	0.121	0.136	0.167	0.189	0.189	0.197	0.197	0.197	0.197
0.3	0.091	0.152	0.189	0.235	0.265	0.288	0.295	0.295	0.295	0.295
0.4	0.098	0.189	0.258	0.311	0.356	0.379	0.386	0.402	0.402	0.402
0.5	0.098	0.189	0.273	0.341	0.402	0.432	0.462	0.485	0.500	0.500
0.6	0.098	0.189	0.273	0.371	0.455	0.500	0.538	0.576	0.591	0.598
0.7	0.098	0.197	0.280	0.379	0.470	0.523	0.583	0.652	0.674	0.705
0.8	0.098	0.197	0.280	0.386	0.485	0.568	0.644	0.720	0.765	0.803
0.9	0.098	0.197	0.280	0.386	0.485	0.583	0.667	0.758	0.833	0.902
1.0	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.598	0.705	0.803	0.902	1.000

(b)

$$c(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{\partial^2 C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.061	0.008	0.000	0.030	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.023	0.030	0.015	0.000	0.023	0.000	0.008	0.000	0.000	0.000
0.3	0.008	0.023	0.023	0.015	0.008	0.023	0.000	0.000	0.000	0.000
0.4	0.008	0.030	0.030	0.008	0.015	0.000	0.000	0.015	0.000	0.000
0.5	0.000	0.000	0.015	0.015	0.015	0.008	0.023	0.008	0.015	0.000
0.6	0.000	0.000	0.000	0.030	0.023	0.015	0.008	0.015	0.000	0.008
0.7	0.000	0.008	0.000	0.000	0.008	0.008	0.023	0.030	0.008	0.023
0.8	0.000	0.000	0.000	0.008	0.008	0.030	0.015	0.008	0.023	0.008
0.9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.015	0.008	0.015	0.030	0.030
1.0	0.000	0.000	0.015	0.000	0.000	0.000	0.023	0.008	0.023	0.030

TAB. E.7 – *Portefeuille et Convertible Arbitrage*

(a)

$$C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq \mathbf{u}_1, U_2 \leq \mathbf{u}_2]$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.023	0.023	0.030	0.045	0.053	0.053	0.061	0.068	0.098	0.098
0.2	0.030	0.045	0.083	0.106	0.121	0.129	0.136	0.152	0.189	0.197
0.3	0.061	0.083	0.129	0.152	0.174	0.205	0.220	0.242	0.288	0.295
0.4	0.068	0.106	0.197	0.227	0.258	0.288	0.318	0.348	0.394	0.402
0.5	0.068	0.114	0.212	0.265	0.318	0.364	0.409	0.439	0.492	0.500
0.6	0.076	0.136	0.235	0.303	0.356	0.424	0.485	0.523	0.576	0.598
0.7	0.098	0.167	0.265	0.348	0.402	0.470	0.538	0.606	0.667	0.705
0.8	0.098	0.189	0.288	0.379	0.455	0.523	0.606	0.674	0.750	0.803
0.9	0.098	0.197	0.295	0.394	0.485	0.561	0.652	0.735	0.826	0.902
1.0	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.598	0.705	0.803	0.902	1.000

(b)

$$c(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{\partial^2 C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.023	0.000	0.008	0.015	0.008	0.000	0.008	0.008	0.030	0.000
0.2	0.008	0.015	0.030	0.008	0.008	0.008	0.000	0.008	0.008	0.008
0.3	0.030	0.008	0.008	0.000	0.008	0.023	0.008	0.008	0.008	0.000
0.4	0.008	0.015	0.045	0.008	0.008	0.000	0.015	0.008	0.000	0.000
0.5	0.000	0.008	0.008	0.023	0.023	0.015	0.015	0.000	0.008	0.000
0.6	0.008	0.015	0.000	0.015	0.000	0.023	0.015	0.008	0.000	0.015
0.7	0.023	0.008	0.000	0.015	0.000	0.000	0.008	0.030	0.008	0.015
0.8	0.000	0.023	0.000	0.008	0.023	0.000	0.015	0.000	0.015	0.015
0.9	0.000	0.008	0.000	0.008	0.015	0.008	0.008	0.015	0.015	0.023
1.0	0.000	0.000	0.000	0.008	0.008	0.023	0.015	0.015	0.008	0.023

TAB. E.8 – Global Macro *et* Distress

(a)

$$C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq \mathbf{u}_1, U_2 \leq \mathbf{u}_2]$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.008	0.030	0.053	0.061	0.068	0.068	0.076	0.083	0.091	0.098
0.2	0.015	0.045	0.076	0.098	0.114	0.129	0.144	0.174	0.182	0.197
0.3	0.038	0.083	0.121	0.159	0.189	0.205	0.235	0.273	0.280	0.295
0.4	0.053	0.129	0.174	0.227	0.265	0.280	0.311	0.348	0.364	0.402
0.5	0.076	0.159	0.220	0.280	0.318	0.356	0.386	0.432	0.447	0.500
0.6	0.076	0.159	0.235	0.295	0.364	0.417	0.462	0.523	0.545	0.598
0.7	0.083	0.174	0.265	0.341	0.432	0.500	0.553	0.621	0.644	0.705
0.8	0.098	0.189	0.280	0.364	0.455	0.538	0.606	0.705	0.742	0.803
0.9	0.098	0.189	0.288	0.386	0.485	0.576	0.667	0.765	0.826	0.902
1.0	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.598	0.705	0.803	0.902	1.000

(b)

$$c(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{\partial^2 C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.008	0.023	0.023	0.008	0.008	0.000	0.008	0.008	0.008	0.008
0.2	0.008	0.008	0.008	0.015	0.008	0.015	0.008	0.023	0.000	0.008
0.3	0.023	0.015	0.008	0.015	0.015	0.000	0.015	0.008	0.000	0.000
0.4	0.015	0.030	0.008	0.015	0.008	0.000	0.000	0.000	0.008	0.023
0.5	0.023	0.008	0.015	0.008	0.000	0.023	0.000	0.008	0.000	0.015
0.6	0.000	0.000	0.015	0.000	0.030	0.015	0.015	0.015	0.008	0.000
0.7	0.008	0.008	0.015	0.015	0.023	0.015	0.008	0.008	0.000	0.008
0.8	0.015	0.000	0.000	0.008	0.000	0.015	0.015	0.030	0.015	0.000
0.9	0.000	0.000	0.008	0.015	0.008	0.008	0.023	0.000	0.023	0.015
1.0	0.000	0.008	0.000	0.008	0.000	0.008	0.015	0.000	0.038	0.023

TAB. E.9 – Global Macro *et* Equity Hedge

(a)

$$C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq \mathbf{u}_1, U_2 \leq \mathbf{u}_2]$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.045	0.045	0.061	0.068	0.091	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098
0.2	0.053	0.083	0.098	0.136	0.174	0.182	0.189	0.189	0.189	0.197
0.3	0.076	0.114	0.152	0.197	0.242	0.273	0.288	0.288	0.288	0.295
0.4	0.076	0.129	0.182	0.250	0.303	0.348	0.371	0.371	0.386	0.402
0.5	0.083	0.167	0.235	0.303	0.364	0.424	0.447	0.455	0.477	0.500
0.6	0.091	0.174	0.250	0.326	0.402	0.470	0.523	0.538	0.576	0.598
0.7	0.098	0.197	0.280	0.379	0.462	0.538	0.606	0.636	0.674	0.705
0.8	0.098	0.197	0.288	0.386	0.477	0.561	0.652	0.720	0.773	0.803
0.9	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.598	0.697	0.780	0.841	0.902
1.0	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.598	0.705	0.803	0.902	1.000

(b)

$$c(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{\partial^2 C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.045	0.000	0.015	0.008	0.023	0.008	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.008	0.030	0.000	0.030	0.015	0.000	0.008	0.000	0.000	0.008
0.3	0.023	0.008	0.023	0.008	0.008	0.023	0.008	0.000	0.000	0.000
0.4	0.000	0.015	0.015	0.023	0.008	0.015	0.008	0.000	0.015	0.008
0.5	0.008	0.030	0.015	0.000	0.008	0.015	0.000	0.008	0.008	0.008
0.6	0.008	0.000	0.008	0.008	0.015	0.008	0.030	0.008	0.015	0.000
0.7	0.008	0.015	0.008	0.023	0.008	0.008	0.015	0.015	0.000	0.008
0.8	0.000	0.000	0.008	0.000	0.008	0.008	0.023	0.038	0.015	0.000
0.9	0.000	0.000	0.008	0.008	0.008	0.015	0.008	0.015	0.008	0.030
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.008	0.015	0.038	0.038

TAB. E.10 – Global Macro *et* Equity Market Neutral

(a)

$$C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq \mathbf{u}_1, U_2 \leq \mathbf{u}_2]$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.038	0.053	0.076	0.091	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098
0.2	0.045	0.083	0.114	0.136	0.174	0.182	0.189	0.189	0.197	0.197
0.3	0.068	0.129	0.159	0.205	0.258	0.273	0.288	0.288	0.295	0.295
0.4	0.068	0.136	0.182	0.265	0.318	0.333	0.348	0.371	0.394	0.402
0.5	0.083	0.159	0.212	0.303	0.386	0.409	0.424	0.447	0.485	0.500
0.6	0.098	0.174	0.242	0.333	0.424	0.477	0.500	0.538	0.583	0.598
0.7	0.098	0.197	0.273	0.371	0.462	0.545	0.591	0.629	0.682	0.705
0.8	0.098	0.197	0.280	0.379	0.477	0.561	0.644	0.712	0.780	0.803
0.9	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.591	0.682	0.773	0.856	0.902
1.0	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.598	0.705	0.803	0.902	1.000

(b)

$$c(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{\partial^2 C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}{\partial \mathbf{u}_1 \partial \mathbf{u}_2}$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.038	0.015	0.023	0.015	0.008	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.008	0.023	0.008	0.008	0.030	0.008	0.008	0.000	0.008	0.000
0.3	0.023	0.023	0.000	0.023	0.015	0.008	0.008	0.000	0.000	0.000
0.4	0.000	0.008	0.015	0.038	0.000	0.000	0.000	0.023	0.015	0.008
0.5	0.015	0.008	0.008	0.008	0.030	0.008	0.000	0.000	0.015	0.008
0.6	0.015	0.000	0.015	0.000	0.008	0.030	0.008	0.015	0.008	0.000
0.7	0.000	0.023	0.008	0.008	0.000	0.030	0.023	0.000	0.008	0.008
0.8	0.000	0.000	0.008	0.000	0.008	0.000	0.038	0.030	0.015	0.000
0.9	0.000	0.000	0.015	0.008	0.000	0.008	0.008	0.023	0.015	0.023
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.008	0.015	0.008	0.015	0.053

TAB. E.11 – Global Macro *et* Event Driven

(a)

$$C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq \mathbf{u}_1, U_2 \leq \mathbf{u}_2]$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.015	0.053	0.061	0.076	0.083	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098
0.2	0.023	0.061	0.098	0.136	0.159	0.182	0.189	0.189	0.189	0.197
0.3	0.053	0.098	0.136	0.189	0.242	0.265	0.288	0.288	0.288	0.295
0.4	0.076	0.129	0.182	0.250	0.318	0.341	0.371	0.379	0.386	0.402
0.5	0.083	0.159	0.220	0.295	0.371	0.409	0.455	0.470	0.477	0.500
0.6	0.083	0.174	0.250	0.333	0.409	0.462	0.508	0.538	0.561	0.598
0.7	0.098	0.197	0.288	0.371	0.447	0.508	0.583	0.621	0.652	0.705
0.8	0.098	0.197	0.295	0.379	0.470	0.553	0.629	0.689	0.750	0.803
0.9	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.583	0.674	0.758	0.833	0.902
1.0	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.598	0.705	0.803	0.902	1.000

(b)

$$c(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{\partial^2 C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.015	0.038	0.008	0.015	0.008	0.015	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.008	0.000	0.030	0.023	0.015	0.008	0.008	0.000	0.000	0.008
0.3	0.030	0.008	0.000	0.015	0.030	0.000	0.015	0.000	0.000	0.000
0.4	0.023	0.008	0.015	0.015	0.015	0.000	0.008	0.008	0.008	0.008
0.5	0.008	0.023	0.008	0.008	0.008	0.015	0.015	0.008	0.000	0.008
0.6	0.000	0.015	0.015	0.008	0.000	0.015	0.000	0.015	0.015	0.015
0.7	0.015	0.008	0.015	0.000	0.000	0.008	0.030	0.008	0.008	0.015
0.8	0.000	0.000	0.008	0.000	0.015	0.023	0.000	0.023	0.030	0.000
0.9	0.000	0.000	0.000	0.023	0.008	0.000	0.015	0.023	0.015	0.015
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.015	0.015	0.015	0.023	0.030

TAB. E.12 -- Global Macro *et* Convertible Arbitrage

(a)

$$C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq \mathbf{u}_1, U_2 \leq \mathbf{u}_2]$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.015	0.030	0.053	0.061	0.076	0.076	0.076	0.083	0.098	0.098
0.2	0.023	0.053	0.091	0.121	0.136	0.136	0.159	0.167	0.189	0.197
0.3	0.053	0.091	0.129	0.159	0.182	0.197	0.242	0.265	0.288	0.295
0.4	0.068	0.106	0.167	0.220	0.250	0.280	0.326	0.348	0.379	0.402
0.5	0.076	0.121	0.189	0.258	0.303	0.333	0.394	0.424	0.470	0.500
0.6	0.091	0.144	0.220	0.303	0.356	0.402	0.470	0.500	0.568	0.598
0.7	0.091	0.152	0.242	0.326	0.402	0.462	0.530	0.568	0.652	0.705
0.8	0.098	0.182	0.280	0.379	0.462	0.523	0.598	0.644	0.735	0.803
0.9	0.098	0.197	0.295	0.394	0.485	0.553	0.644	0.720	0.811	0.902
1.0	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.598	0.705	0.803	0.902	1.000

(b)

$$c(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{\partial^2 C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.015	0.015	0.023	0.008	0.015	0.000	0.000	0.008	0.015	0.000
0.2	0.008	0.015	0.015	0.023	0.000	0.000	0.023	0.000	0.008	0.008
0.3	0.030	0.008	0.000	0.000	0.008	0.015	0.023	0.015	0.000	0.000
0.4	0.015	0.000	0.023	0.023	0.008	0.015	0.000	0.000	0.008	0.015
0.5	0.008	0.008	0.008	0.015	0.015	0.000	0.015	0.008	0.015	0.008
0.6	0.015	0.008	0.008	0.015	0.008	0.015	0.008	0.000	0.023	0.000
0.7	0.000	0.008	0.015	0.000	0.023	0.015	0.000	0.008	0.015	0.023
0.8	0.008	0.023	0.008	0.015	0.008	0.000	0.008	0.008	0.008	0.015
0.9	0.000	0.015	0.000	0.000	0.008	0.008	0.015	0.030	0.000	0.023
1.0	0.000	0.000	0.000	0.008	0.008	0.030	0.015	0.023	0.008	0.008

TAB. E.13 - Global Macro *et* Funds of Funds

(a)

$$C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq \mathbf{u}_1, U_2 \leq \mathbf{u}_2]$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.038	0.068	0.083	0.083	0.091	0.091	0.098	0.098	0.098	0.098
0.2	0.068	0.106	0.144	0.167	0.174	0.182	0.189	0.189	0.197	0.197
0.3	0.083	0.129	0.182	0.227	0.258	0.273	0.288	0.288	0.295	0.295
0.4	0.091	0.144	0.220	0.288	0.318	0.356	0.371	0.386	0.402	0.402
0.5	0.091	0.174	0.258	0.333	0.379	0.439	0.455	0.477	0.492	0.500
0.6	0.091	0.182	0.273	0.356	0.424	0.500	0.530	0.568	0.591	0.598
0.7	0.091	0.189	0.288	0.394	0.477	0.561	0.606	0.652	0.697	0.705
0.8	0.098	0.197	0.295	0.402	0.492	0.591	0.674	0.735	0.795	0.803
0.9	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.598	0.697	0.780	0.856	0.902
1.0	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.598	0.705	0.803	0.902	1.000

(b)

$$c(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{\partial^2 C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}{\partial \mathbf{u}_1 \partial \mathbf{u}_2}$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.038	0.030	0.015	0.000	0.008	0.000	0.008	0.000	0.000	0.000
0.2	0.030	0.008	0.023	0.023	0.000	0.008	0.000	0.000	0.008	0.000
0.3	0.015	0.008	0.015	0.023	0.023	0.008	0.008	0.000	0.000	0.000
0.4	0.008	0.008	0.023	0.023	0.000	0.023	0.000	0.015	0.008	0.000
0.5	0.000	0.030	0.008	0.008	0.015	0.023	0.000	0.008	0.000	0.008
0.6	0.000	0.008	0.008	0.008	0.023	0.015	0.015	0.015	0.008	0.000
0.7	0.000	0.008	0.008	0.023	0.015	0.008	0.015	0.008	0.023	0.000
0.8	0.008	0.000	0.000	0.000	0.008	0.015	0.038	0.015	0.015	0.000
0.9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.008	0.000	0.015	0.023	0.015	0.038
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.008	0.015	0.023	0.053

TAB. E.14 – Equity Hedge *et* Fuuds of Fuuds

(a)

$$C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq \mathbf{u}_1, U_2 \leq \mathbf{u}_2]$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.061	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098
0.2	0.083	0.159	0.182	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197
0.3	0.091	0.182	0.250	0.280	0.295	0.295	0.295	0.295	0.295	0.295
0.4	0.098	0.197	0.280	0.348	0.379	0.394	0.402	0.402	0.402	0.402
0.5	0.098	0.197	0.288	0.371	0.447	0.470	0.485	0.492	0.500	0.500
0.6	0.098	0.197	0.288	0.394	0.492	0.545	0.568	0.591	0.598	0.598
0.7	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.583	0.659	0.689	0.705	0.705
0.8	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.598	0.705	0.765	0.803	0.803
0.9	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.598	0.705	0.803	0.886	0.902
1.0	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.598	0.705	0.803	0.902	1.000

(b)

$$c(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{\partial^2 C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.061	0.038	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.023	0.038	0.023	0.015	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.3	0.008	0.015	0.045	0.015	0.015	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.4	0.008	0.008	0.015	0.038	0.015	0.015	0.008	0.000	0.000	0.000
0.5	0.000	0.000	0.008	0.015	0.045	0.008	0.008	0.008	0.008	0.000
0.6	0.000	0.000	0.000	0.023	0.023	0.030	0.008	0.015	0.000	0.000
0.7	0.000	0.000	0.008	0.000	0.000	0.030	0.053	0.008	0.008	0.000
0.8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.015	0.030	0.030	0.023	0.000
0.9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.038	0.045	0.015
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.015	0.083

TAB. E.15 - Equity Hedge *et* Event Driven

(a)

$$C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq \mathbf{u}_1, U_2 \leq \mathbf{u}_2]$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.053	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098
0.2	0.076	0.136	0.167	0.174	0.182	0.182	0.189	0.197	0.197	0.197
0.3	0.091	0.174	0.220	0.250	0.273	0.280	0.288	0.295	0.295	0.295
0.4	0.098	0.189	0.258	0.318	0.371	0.379	0.394	0.402	0.402	0.402
0.5	0.098	0.197	0.280	0.356	0.432	0.462	0.485	0.500	0.500	0.500
0.6	0.098	0.197	0.295	0.394	0.477	0.530	0.576	0.591	0.591	0.598
0.7	0.098	0.197	0.295	0.402	0.492	0.561	0.644	0.674	0.697	0.705
0.8	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.576	0.667	0.727	0.773	0.803
0.9	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.598	0.705	0.788	0.856	0.902
1.0	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.598	0.705	0.803	0.902	1.000

(b)

$$c(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{\partial^2 C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.053	0.045	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.023	0.015	0.030	0.008	0.008	0.000	0.008	0.008	0.000	0.000
0.3	0.015	0.023	0.015	0.023	0.015	0.008	0.000	0.000	0.000	0.000
0.4	0.008	0.008	0.023	0.030	0.030	0.000	0.008	0.000	0.000	0.000
0.5	0.000	0.008	0.015	0.015	0.023	0.023	0.008	0.008	0.000	0.000
0.6	0.000	0.000	0.015	0.023	0.008	0.023	0.023	0.000	0.000	0.008
0.7	0.000	0.000	0.000	0.008	0.008	0.015	0.038	0.015	0.023	0.000
0.8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.008	0.008	0.008	0.030	0.023	0.023
0.9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.023	0.015	0.023	0.023	0.015
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.015	0.030	0.053

TAB. E.16 -- Equity Hedge *et* Convertible Arbitrage

(a)

$$C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq \mathbf{u}_1, U_2 \leq \mathbf{u}_2]$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.023	0.045	0.076	0.083	0.091	0.091	0.091	0.098	0.098	0.098
0.2	0.045	0.068	0.121	0.152	0.159	0.167	0.167	0.182	0.197	0.197
0.3	0.061	0.091	0.159	0.197	0.212	0.227	0.250	0.273	0.288	0.295
0.4	0.068	0.106	0.189	0.235	0.258	0.288	0.333	0.356	0.394	0.402
0.5	0.068	0.129	0.220	0.265	0.311	0.356	0.417	0.455	0.492	0.500
0.6	0.083	0.159	0.250	0.311	0.379	0.424	0.492	0.538	0.591	0.598
0.7	0.091	0.174	0.265	0.348	0.424	0.492	0.568	0.629	0.689	0.705
0.8	0.098	0.197	0.295	0.386	0.470	0.538	0.614	0.697	0.773	0.803
0.9	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.583	0.682	0.765	0.848	0.902
1.0	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.598	0.705	0.803	0.902	1.000

(b)

$$c(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{\partial^2 C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.023	0.023	0.030	0.008	0.008	0.000	0.000	0.008	0.000	0.000
0.2	0.023	0.000	0.023	0.023	0.000	0.008	0.000	0.008	0.015	0.000
0.3	0.015	0.008	0.015	0.008	0.008	0.008	0.023	0.008	0.000	0.008
0.4	0.008	0.008	0.015	0.008	0.008	0.015	0.023	0.000	0.023	0.000
0.5	0.000	0.023	0.008	0.000	0.023	0.015	0.015	0.015	0.000	0.000
0.6	0.015	0.015	0.000	0.015	0.023	0.000	0.008	0.008	0.015	0.000
0.7	0.008	0.008	0.000	0.023	0.008	0.023	0.008	0.015	0.008	0.008
0.8	0.008	0.015	0.008	0.008	0.008	0.000	0.000	0.023	0.015	0.015
0.9	0.000	0.000	0.000	0.015	0.015	0.015	0.023	0.000	0.008	0.023
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.015	0.008	0.015	0.015	0.045

TAB. E.17 – Equity Hedge *et* Funds of Funds

(a)

$$C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq \mathbf{u}_1, U_2 \leq \mathbf{u}_2]$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.053	0.091	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098
0.2	0.068	0.129	0.174	0.182	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197
0.3	0.076	0.167	0.227	0.265	0.288	0.288	0.295	0.295	0.295	0.295
0.4	0.083	0.174	0.250	0.318	0.371	0.386	0.394	0.402	0.402	0.402
0.5	0.083	0.182	0.273	0.341	0.417	0.462	0.477	0.500	0.500	0.500
0.6	0.091	0.189	0.288	0.371	0.447	0.530	0.561	0.583	0.598	0.598
0.7	0.098	0.197	0.295	0.394	0.477	0.561	0.621	0.689	0.705	0.705
0.8	0.098	0.197	0.295	0.394	0.492	0.591	0.674	0.758	0.788	0.803
0.9	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.598	0.705	0.803	0.871	0.902
1.0	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.598	0.705	0.803	0.902	1.000

(b)

$$c(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{\partial^2 C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.053	0.038	0.008	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.015	0.023	0.038	0.008	0.015	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.3	0.008	0.030	0.015	0.030	0.008	0.000	0.008	0.000	0.000	0.000
0.4	0.008	0.000	0.015	0.030	0.030	0.015	0.000	0.008	0.000	0.000
0.5	0.000	0.008	0.015	0.000	0.023	0.030	0.008	0.015	0.000	0.000
0.6	0.008	0.000	0.008	0.015	0.000	0.038	0.015	0.000	0.015	0.000
0.7	0.008	0.000	0.000	0.015	0.008	0.000	0.030	0.045	0.000	0.000
0.8	0.000	0.000	0.000	0.000	0.015	0.015	0.023	0.015	0.015	0.015
0.9	0.000	0.000	0.000	0.008	0.000	0.000	0.023	0.015	0.038	0.015
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.030	0.068

TAB. E.18 - Equity Market Neutral *et* Event Driven

(a)

$$C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq \mathbf{u}_1, U_2 \leq \mathbf{u}_2]$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.023	0.068	0.068	0.091	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098
0.2	0.076	0.136	0.144	0.167	0.182	0.189	0.189	0.197	0.197	0.197
0.3	0.091	0.159	0.205	0.242	0.273	0.288	0.288	0.295	0.295	0.295
0.4	0.098	0.182	0.242	0.303	0.356	0.371	0.386	0.402	0.402	0.402
0.5	0.098	0.197	0.265	0.341	0.417	0.462	0.485	0.500	0.500	0.500
0.6	0.098	0.197	0.273	0.364	0.447	0.515	0.553	0.568	0.576	0.598
0.7	0.098	0.197	0.273	0.371	0.455	0.523	0.598	0.636	0.682	0.705
0.8	0.098	0.197	0.288	0.386	0.477	0.553	0.644	0.712	0.765	0.803
0.9	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.598	0.697	0.780	0.848	0.902
1.0	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.598	0.705	0.803	0.902	1.000

(b)

$$c(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{\partial^2 C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}{\partial \mathbf{u}_1 \partial \mathbf{u}_2}$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.023	0.045	0.000	0.023	0.008	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.053	0.015	0.008	0.000	0.008	0.008	0.000	0.008	0.000	0.000
0.3	0.015	0.008	0.038	0.015	0.015	0.008	0.000	0.000	0.000	0.000
0.4	0.008	0.015	0.015	0.023	0.023	0.000	0.015	0.008	0.000	0.000
0.5	0.000	0.015	0.008	0.015	0.023	0.030	0.008	0.000	0.000	0.000
0.6	0.000	0.000	0.008	0.015	0.008	0.023	0.015	0.000	0.008	0.023
0.7	0.000	0.000	0.000	0.008	0.000	0.000	0.038	0.023	0.038	0.000
0.8	0.000	0.000	0.015	0.000	0.008	0.008	0.015	0.030	0.008	0.015
0.9	0.000	0.000	0.008	0.008	0.008	0.023	0.008	0.015	0.015	0.015
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.008	0.015	0.030	0.045

TAB. E.19 - Equity Market Neutral *et* Convertible Arbitrage

(a)

$$C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq \mathbf{u}_1, U_2 \leq \mathbf{u}_2]$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.015	0.045	0.068	0.083	0.083	0.091	0.091	0.091	0.098	0.098
0.2	0.038	0.076	0.121	0.144	0.159	0.167	0.174	0.182	0.197	0.197
0.3	0.053	0.091	0.152	0.174	0.189	0.212	0.227	0.250	0.288	0.295
0.4	0.076	0.114	0.189	0.235	0.258	0.288	0.311	0.348	0.394	0.402
0.5	0.076	0.136	0.227	0.280	0.303	0.333	0.394	0.439	0.492	0.500
0.6	0.083	0.152	0.242	0.311	0.348	0.402	0.470	0.523	0.583	0.598
0.7	0.098	0.174	0.265	0.348	0.409	0.470	0.538	0.614	0.682	0.705
0.8	0.098	0.197	0.295	0.402	0.470	0.538	0.621	0.705	0.773	0.803
0.9	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.568	0.667	0.750	0.841	0.902
1.0	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.598	0.705	0.803	0.902	1.000

(b)

$$c(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{\partial^2 C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.015	0.030	0.023	0.015	0.000	0.008	0.000	0.000	0.008	0.000
0.2	0.023	0.008	0.023	0.008	0.015	0.000	0.008	0.008	0.008	0.000
0.3	0.015	0.000	0.015	0.000	0.000	0.015	0.008	0.015	0.023	0.008
0.4	0.023	0.000	0.015	0.023	0.008	0.008	0.008	0.015	0.008	0.000
0.5	0.000	0.023	0.015	0.008	0.000	0.000	0.038	0.008	0.008	0.000
0.6	0.008	0.008	0.000	0.015	0.015	0.023	0.008	0.008	0.008	0.008
0.7	0.015	0.008	0.000	0.015	0.023	0.008	0.000	0.023	0.008	0.008
0.8	0.000	0.023	0.008	0.023	0.008	0.008	0.015	0.008	0.000	0.008
0.9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.030	0.000	0.015	0.000	0.023	0.030
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.030	0.008	0.015	0.008	0.038

TAB. E.20 – Equity Market Neutral *et* Funds of Funds

(a)

$$C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq \mathbf{u}_1, U_2 \leq \mathbf{u}_2]$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.038	0.068	0.083	0.091	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098
0.2	0.068	0.136	0.167	0.189	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197
0.3	0.083	0.174	0.220	0.250	0.273	0.273	0.280	0.295	0.295	0.295
0.4	0.083	0.174	0.250	0.303	0.356	0.371	0.379	0.402	0.402	0.402
0.5	0.083	0.182	0.280	0.348	0.402	0.447	0.470	0.500	0.500	0.500
0.6	0.083	0.182	0.280	0.348	0.424	0.500	0.545	0.591	0.598	0.598
0.7	0.083	0.182	0.280	0.371	0.462	0.545	0.614	0.682	0.697	0.705
0.8	0.098	0.197	0.295	0.394	0.485	0.576	0.674	0.742	0.788	0.803
0.9	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.598	0.697	0.795	0.871	0.902
1.0	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.598	0.705	0.803	0.902	1.000

(b)

$$c(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{\partial^2 C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.038	0.030	0.015	0.008	0.008	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.030	0.038	0.015	0.015	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.3	0.015	0.023	0.015	0.008	0.015	0.000	0.008	0.015	0.000	0.000
0.4	0.000	0.000	0.030	0.023	0.030	0.015	0.000	0.008	0.000	0.000
0.5	0.000	0.008	0.023	0.015	0.000	0.030	0.015	0.008	0.000	0.000
0.6	0.000	0.000	0.000	0.000	0.023	0.030	0.023	0.015	0.008	0.000
0.7	0.000	0.000	0.000	0.023	0.015	0.008	0.023	0.023	0.008	0.008
0.8	0.015	0.000	0.000	0.008	0.000	0.008	0.030	0.000	0.030	0.008
0.9	0.000	0.000	0.000	0.008	0.008	0.008	0.000	0.030	0.030	0.015
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.008	0.000	0.023	0.068

TAB. E.21 – Event Driven *et* Convertible Arbitrage

(a)

$$C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq \mathbf{u}_1, U_2 \leq \mathbf{u}_2]$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.045	0.045	0.068	0.068	0.076	0.076	0.083	0.091	0.098	0.098
0.2	0.061	0.083	0.144	0.159	0.167	0.167	0.182	0.189	0.197	0.197
0.3	0.068	0.098	0.174	0.205	0.235	0.242	0.258	0.280	0.295	0.295
0.4	0.068	0.121	0.205	0.258	0.295	0.311	0.341	0.364	0.402	0.402
0.5	0.068	0.129	0.212	0.265	0.311	0.356	0.417	0.447	0.492	0.500
0.6	0.068	0.152	0.235	0.295	0.364	0.417	0.492	0.523	0.583	0.598
0.7	0.076	0.174	0.258	0.326	0.409	0.485	0.568	0.614	0.682	0.705
0.8	0.083	0.182	0.280	0.356	0.447	0.530	0.614	0.689	0.765	0.803
0.9	0.091	0.189	0.288	0.386	0.485	0.583	0.674	0.765	0.841	0.902
1.0	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.598	0.705	0.803	0.902	1.000

(b)

$$c(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{\partial^2 C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.045	0.000	0.023	0.000	0.008	0.000	0.008	0.008	0.008	0.000
0.2	0.015	0.023	0.038	0.015	0.000	0.000	0.008	0.000	0.000	0.000
0.3	0.008	0.008	0.015	0.015	0.023	0.008	0.000	0.015	0.008	0.000
0.4	0.000	0.023	0.008	0.023	0.008	0.008	0.015	0.000	0.023	0.000
0.5	0.000	0.008	0.000	0.000	0.008	0.030	0.030	0.008	0.008	0.008
0.6	0.000	0.023	0.000	0.008	0.023	0.008	0.015	0.000	0.015	0.008
0.7	0.008	0.015	0.000	0.008	0.015	0.023	0.008	0.015	0.008	0.008
0.8	0.008	0.000	0.015	0.008	0.008	0.008	0.000	0.030	0.008	0.015
0.9	0.008	0.000	0.000	0.023	0.008	0.015	0.008	0.015	0.000	0.023
1.0	0.008	0.000	0.000	0.008	0.000	0.000	0.015	0.008	0.023	0.038

TAB. E.22 – Event Driven *et* Fund of Funds

(a)

$$C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq \mathbf{u}_1, U_2 \leq \mathbf{u}_2]$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.030	0.068	0.076	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098
0.2	0.061	0.129	0.159	0.182	0.189	0.197	0.197	0.197	0.197	0.197
0.3	0.076	0.167	0.212	0.258	0.288	0.295	0.295	0.295	0.295	0.295
0.4	0.083	0.174	0.250	0.311	0.356	0.379	0.386	0.402	0.402	0.402
0.5	0.091	0.182	0.265	0.333	0.409	0.455	0.470	0.500	0.500	0.500
0.6	0.091	0.189	0.280	0.348	0.424	0.492	0.530	0.568	0.591	0.598
0.7	0.098	0.197	0.288	0.386	0.470	0.545	0.606	0.659	0.697	0.705
0.8	0.098	0.197	0.295	0.402	0.485	0.568	0.652	0.720	0.765	0.803
0.9	0.098	0.197	0.295	0.402	0.492	0.583	0.674	0.773	0.833	0.902
1.0	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.598	0.705	0.803	0.902	1.000

(b)

$$c(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{\partial^2 C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.030	0.038	0.008	0.023	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.030	0.030	0.023	0.000	0.008	0.008	0.000	0.000	0.000	0.000
0.3	0.015	0.023	0.015	0.023	0.023	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.4	0.008	0.000	0.030	0.015	0.015	0.015	0.008	0.015	0.000	0.000
0.5	0.008	0.000	0.008	0.008	0.030	0.023	0.008	0.015	0.000	0.000
0.6	0.000	0.008	0.008	0.000	0.000	0.023	0.023	0.008	0.023	0.008
0.7	0.008	0.000	0.000	0.030	0.008	0.008	0.023	0.015	0.015	0.000
0.8	0.000	0.000	0.008	0.008	0.000	0.008	0.023	0.015	0.008	0.030
0.9	0.000	0.000	0.000	0.000	0.008	0.008	0.008	0.030	0.015	0.030
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.008	0.008	0.015	0.000	0.038	0.030

TAB. E.23 -- Convertible Arbitrage *et* Fund of Funds

(a)

$$C(u_1, u_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2]$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.030	0.045	0.061	0.083	0.083	0.098	0.098	0.098	0.098	0.098
0.2	0.053	0.076	0.106	0.136	0.136	0.159	0.182	0.189	0.197	0.197
0.3	0.076	0.121	0.182	0.212	0.220	0.250	0.280	0.288	0.295	0.295
0.4	0.098	0.152	0.220	0.265	0.280	0.326	0.364	0.386	0.402	0.402
0.5	0.098	0.167	0.235	0.295	0.341	0.394	0.439	0.462	0.492	0.500
0.6	0.098	0.174	0.250	0.311	0.364	0.439	0.508	0.538	0.568	0.598
0.7	0.098	0.182	0.265	0.341	0.402	0.485	0.576	0.621	0.674	0.705
0.8	0.098	0.197	0.280	0.364	0.432	0.523	0.621	0.689	0.742	0.803
0.9	0.098	0.197	0.295	0.394	0.485	0.583	0.682	0.773	0.833	0.902
1.0	0.098	0.197	0.295	0.402	0.500	0.598	0.705	0.803	0.902	1.000

(b)

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.030	0.015	0.015	0.023	0.000	0.015	0.000	0.000	0.000	0.000
0.2	0.023	0.008	0.015	0.008	0.000	0.008	0.023	0.008	0.008	0.000
0.3	0.023	0.023	0.030	0.000	0.008	0.008	0.008	0.000	0.000	0.000
0.4	0.023	0.008	0.008	0.015	0.008	0.015	0.008	0.015	0.008	0.000
0.5	0.000	0.015	0.000	0.015	0.030	0.008	0.008	0.000	0.015	0.008
0.6	0.000	0.008	0.008	0.000	0.008	0.023	0.023	0.008	0.000	0.023
0.7	0.000	0.008	0.008	0.015	0.008	0.008	0.023	0.015	0.023	0.000
0.8	0.000	0.015	0.000	0.008	0.008	0.008	0.008	0.023	0.000	0.030
0.9	0.000	0.000	0.015	0.015	0.023	0.008	0.000	0.023	0.008	0.008
1.0	0.000	0.000	0.000	0.008	0.008	0.000	0.008	0.008	0.038	0.030

TAB. E.24 -- *Obligations et Global-Macro*

(a)

$$C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq \mathbf{u}_1, U_2 \leq \mathbf{u}_2]$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.015	0.023	0.053	0.068	0.076	0.091	0.091	0.098	0.098	0.098
0.2	0.030	0.053	0.091	0.106	0.121	0.144	0.152	0.174	0.197	0.197
0.3	0.053	0.091	0.129	0.167	0.189	0.220	0.242	0.273	0.295	0.295
0.4	0.061	0.121	0.159	0.212	0.258	0.295	0.318	0.364	0.386	0.394
0.5	0.076	0.136	0.182	0.242	0.303	0.356	0.402	0.455	0.485	0.500
0.6	0.076	0.136	0.197	0.273	0.333	0.402	0.462	0.515	0.553	0.598
0.7	0.076	0.152	0.235	0.311	0.386	0.462	0.523	0.583	0.636	0.697
0.8	0.083	0.167	0.265	0.341	0.424	0.500	0.568	0.636	0.705	0.795
0.9	0.098	0.189	0.288	0.371	0.470	0.561	0.644	0.720	0.795	0.894
1.0	0.098	0.197	0.295	0.394	0.500	0.598	0.697	0.795	0.894	1.000

(b)

$$c(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{\partial^2 C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.015	0.008	0.030	0.015	0.008	0.015	0.000	0.008	0.000	0.000
0.2	0.015	0.015	0.008	0.000	0.008	0.008	0.008	0.015	0.023	0.000
0.3	0.023	0.015	0.000	0.023	0.008	0.008	0.015	0.008	0.000	0.000
0.4	0.008	0.023	0.000	0.015	0.023	0.008	0.000	0.015	0.000	0.008
0.5	0.015	0.000	0.008	0.008	0.015	0.015	0.023	0.008	0.008	0.008
0.6	0.000	0.000	0.015	0.015	0.000	0.015	0.015	0.000	0.008	0.030
0.7	0.000	0.015	0.023	0.000	0.015	0.008	0.000	0.008	0.015	0.015
0.8	0.008	0.008	0.015	0.000	0.008	0.000	0.008	0.008	0.015	0.030
0.9	0.015	0.008	0.000	0.008	0.015	0.015	0.015	0.008	0.008	0.008
1.0	0.000	0.008	0.000	0.015	0.008	0.008	0.015	0.023	0.023	0.008

TAB. E.25 – *Obligations et Distress*

(a)

$$C(u_1, u_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2]$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.030	0.038	0.038	0.068	0.083	0.091	0.091	0.098	0.098	0.098
0.2	0.053	0.068	0.098	0.136	0.152	0.159	0.159	0.167	0.189	0.197
0.3	0.076	0.098	0.136	0.182	0.212	0.235	0.242	0.250	0.280	0.295
0.4	0.076	0.121	0.174	0.227	0.265	0.303	0.326	0.333	0.364	0.394
0.5	0.083	0.144	0.205	0.273	0.326	0.371	0.394	0.424	0.462	0.500
0.6	0.083	0.152	0.220	0.303	0.364	0.432	0.462	0.492	0.545	0.598
0.7	0.083	0.159	0.227	0.311	0.386	0.462	0.515	0.576	0.636	0.697
0.8	0.091	0.182	0.258	0.356	0.439	0.523	0.591	0.659	0.727	0.795
0.9	0.098	0.197	0.288	0.386	0.477	0.568	0.652	0.735	0.811	0.894
1.0	0.098	0.197	0.295	0.394	0.500	0.598	0.697	0.795	0.894	1.000

(b)

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.030	0.008	0.000	0.030	0.015	0.008	0.000	0.008	0.000	0.000
0.2	0.023	0.008	0.030	0.008	0.000	0.000	0.000	0.000	0.023	0.008
0.3	0.023	0.008	0.008	0.008	0.015	0.015	0.008	0.000	0.008	0.008
0.4	0.000	0.023	0.015	0.008	0.008	0.015	0.015	0.000	0.000	0.015
0.5	0.008	0.015	0.008	0.015	0.015	0.008	0.000	0.023	0.008	0.008
0.6	0.000	0.008	0.008	0.015	0.008	0.023	0.008	0.000	0.015	0.015
0.7	0.000	0.008	0.000	0.000	0.015	0.008	0.023	0.030	0.008	0.008
0.8	0.008	0.015	0.008	0.015	0.008	0.008	0.015	0.008	0.008	0.008
0.9	0.008	0.008	0.015	0.000	0.008	0.008	0.015	0.015	0.008	0.015
1.0	0.000	0.000	0.008	0.000	0.015	0.008	0.015	0.015	0.023	0.023

TAB. E.26 – *Obligations et Equity Hedge*

(a)

$$C(u_1, u_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2]$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.023	0.045	0.061	0.068	0.068	0.083	0.091	0.098	0.098	0.098
0.2	0.045	0.068	0.091	0.106	0.129	0.159	0.174	0.197	0.197	0.197
0.3	0.076	0.121	0.159	0.189	0.220	0.250	0.265	0.295	0.295	0.295
0.4	0.083	0.152	0.197	0.235	0.265	0.311	0.333	0.379	0.394	0.394
0.5	0.091	0.159	0.212	0.258	0.311	0.379	0.417	0.470	0.500	0.500
0.6	0.091	0.167	0.227	0.280	0.356	0.424	0.485	0.538	0.576	0.598
0.7	0.091	0.167	0.250	0.318	0.409	0.485	0.553	0.606	0.667	0.697
0.8	0.098	0.182	0.273	0.348	0.455	0.538	0.621	0.697	0.758	0.795
0.9	0.098	0.197	0.288	0.386	0.492	0.591	0.682	0.758	0.833	0.894
1.0	0.098	0.197	0.295	0.394	0.500	0.598	0.697	0.795	0.894	1.000

(b)

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.023	0.023	0.015	0.008	0.000	0.015	0.008	0.008	0.000	0.000
0.2	0.023	0.000	0.008	0.008	0.023	0.015	0.008	0.015	0.000	0.000
0.3	0.030	0.023	0.015	0.015	0.008	0.000	0.000	0.008	0.000	0.000
0.4	0.008	0.023	0.008	0.008	0.000	0.015	0.008	0.015	0.015	0.000
0.5	0.008	0.000	0.008	0.008	0.023	0.023	0.015	0.008	0.015	0.000
0.6	0.000	0.008	0.008	0.008	0.023	0.000	0.023	0.000	0.008	0.023
0.7	0.000	0.000	0.023	0.015	0.015	0.008	0.008	0.000	0.023	0.008
0.8	0.008	0.008	0.008	0.008	0.015	0.008	0.015	0.023	0.000	0.008
0.9	0.000	0.015	0.000	0.023	0.000	0.015	0.008	0.000	0.015	0.023
1.0	0.000	0.000	0.008	0.000	0.000	0.000	0.008	0.023	0.023	0.045

TAB. E.27 – *Obligations et Equity Market Neutral*

(a)

$$C(u_1, u_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2]$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.015	0.038	0.053	0.076	0.076	0.083	0.098	0.098	0.098	0.098
0.2	0.045	0.076	0.091	0.114	0.136	0.152	0.174	0.197	0.197	0.197
0.3	0.068	0.121	0.152	0.189	0.227	0.242	0.265	0.295	0.295	0.295
0.4	0.083	0.144	0.174	0.235	0.280	0.303	0.333	0.386	0.394	0.394
0.5	0.083	0.159	0.189	0.258	0.303	0.348	0.402	0.462	0.500	0.500
0.6	0.091	0.167	0.212	0.288	0.333	0.402	0.462	0.530	0.568	0.598
0.7	0.091	0.174	0.227	0.311	0.394	0.462	0.523	0.606	0.659	0.697
0.8	0.091	0.182	0.250	0.341	0.439	0.523	0.606	0.697	0.750	0.795
0.9	0.098	0.197	0.288	0.386	0.492	0.576	0.667	0.758	0.833	0.894
1.0	0.098	0.197	0.295	0.394	0.500	0.598	0.697	0.795	0.894	1.000

(b)

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.015	0.023	0.015	0.023	0.000	0.008	0.015	0.000	0.000	0.000
0.2	0.030	0.008	0.000	0.000	0.023	0.008	0.008	0.023	0.000	0.000
0.3	0.023	0.023	0.015	0.015	0.015	0.000	0.000	0.008	0.000	0.000
0.4	0.015	0.008	0.000	0.023	0.008	0.008	0.008	0.023	0.008	0.000
0.5	0.000	0.015	0.000	0.008	0.000	0.023	0.023	0.008	0.030	0.000
0.6	0.008	0.000	0.015	0.008	0.000	0.023	0.008	0.008	0.000	0.030
0.7	0.000	0.008	0.008	0.008	0.038	0.000	0.000	0.015	0.015	0.008
0.8	0.000	0.008	0.015	0.008	0.015	0.015	0.023	0.008	0.000	0.008
0.9	0.008	0.008	0.023	0.008	0.008	0.000	0.008	0.000	0.023	0.015
1.0	0.000	0.000	0.008	0.000	0.000	0.015	0.008	0.008	0.023	0.045

TAB. E.28 -- *Obligations et Event Driven*

(a)

$$C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq \mathbf{u}_1, U_2 \leq \mathbf{u}_2]$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.045	0.061	0.068	0.068	0.068	0.068	0.076	0.083	0.091	0.098
0.2	0.045	0.083	0.098	0.114	0.129	0.152	0.167	0.182	0.189	0.197
0.3	0.068	0.144	0.174	0.197	0.212	0.235	0.250	0.280	0.288	0.295
0.4	0.068	0.159	0.205	0.250	0.265	0.295	0.318	0.356	0.379	0.394
0.5	0.076	0.167	0.235	0.288	0.311	0.364	0.402	0.439	0.485	0.500
0.6	0.076	0.167	0.242	0.303	0.356	0.417	0.477	0.523	0.576	0.598
0.7	0.083	0.182	0.258	0.326	0.409	0.485	0.553	0.598	0.659	0.697
0.8	0.091	0.189	0.280	0.356	0.447	0.523	0.606	0.682	0.750	0.795
0.9	0.098	0.197	0.295	0.394	0.492	0.583	0.674	0.758	0.833	0.894
1.0	0.098	0.197	0.295	0.394	0.500	0.598	0.697	0.795	0.894	1.000

(b)

$$c(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{\partial^2 C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.045	0.015	0.008	0.000	0.000	0.000	0.008	0.008	0.008	0.008
0.2	0.000	0.023	0.008	0.015	0.015	0.023	0.008	0.008	0.000	0.000
0.3	0.023	0.038	0.015	0.008	0.000	0.000	0.000	0.015	0.000	0.000
0.4	0.000	0.015	0.015	0.023	0.000	0.008	0.008	0.008	0.015	0.008
0.5	0.008	0.000	0.023	0.008	0.008	0.023	0.015	0.000	0.023	0.000
0.6	0.000	0.000	0.008	0.008	0.030	0.008	0.023	0.008	0.008	0.008
0.7	0.008	0.008	0.000	0.008	0.030	0.015	0.008	0.000	0.008	0.015
0.8	0.008	0.000	0.015	0.008	0.008	0.000	0.015	0.030	0.008	0.008
0.9	0.008	0.000	0.008	0.023	0.008	0.015	0.008	0.008	0.008	0.015
1.0	0.000	0.000	0.000	0.000	0.008	0.008	0.008	0.015	0.023	0.045

TAB. E.29 -- *Obligations et Convertible Arbitrage*

(a)

$$C(u_1, u_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2]$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.023	0.030	0.038	0.053	0.053	0.053	0.061	0.068	0.098	0.098
0.2	0.030	0.045	0.083	0.106	0.121	0.129	0.136	0.152	0.189	0.197
0.3	0.053	0.076	0.129	0.159	0.182	0.212	0.220	0.242	0.288	0.295
0.4	0.068	0.106	0.189	0.220	0.250	0.280	0.303	0.341	0.386	0.394
0.5	0.068	0.114	0.212	0.265	0.318	0.356	0.394	0.439	0.492	0.500
0.6	0.091	0.152	0.250	0.311	0.364	0.424	0.477	0.523	0.576	0.598
0.7	0.098	0.167	0.265	0.348	0.409	0.477	0.530	0.606	0.667	0.697
0.8	0.098	0.189	0.288	0.371	0.462	0.538	0.614	0.689	0.750	0.795
0.9	0.098	0.197	0.295	0.386	0.485	0.568	0.652	0.727	0.818	0.894
1.0	0.098	0.197	0.295	0.394	0.500	0.598	0.697	0.795	0.894	1.000

(b)

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.023	0.008	0.008	0.015	0.000	0.000	0.008	0.008	0.030	0.000
0.2	0.008	0.008	0.030	0.008	0.015	0.008	0.000	0.008	0.008	0.008
0.3	0.023	0.008	0.015	0.008	0.008	0.023	0.000	0.008	0.008	0.000
0.4	0.015	0.015	0.030	0.000	0.008	0.000	0.015	0.015	0.000	0.000
0.5	0.000	0.008	0.015	0.023	0.023	0.008	0.015	0.008	0.008	0.000
0.6	0.023	0.015	0.000	0.008	0.000	0.023	0.015	0.000	0.000	0.015
0.7	0.008	0.008	0.000	0.023	0.008	0.008	0.000	0.030	0.008	0.008
0.8	0.000	0.023	0.000	0.000	0.030	0.008	0.023	0.000	0.000	0.015
0.9	0.000	0.008	0.000	0.008	0.008	0.008	0.008	0.000	0.030	0.030
1.0	0.000	0.000	0.000	0.008	0.008	0.015	0.015	0.023	0.008	0.030

TAB. E.30 — Obligations et Fonds de Fonds

(a)

$$C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \mathbb{P}[U_1 \leq \mathbf{u}_1, U_2 \leq \mathbf{u}_2]$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.023	0.030	0.038	0.053	0.053	0.053	0.061	0.068	0.098	0.098
0.2	0.030	0.045	0.083	0.106	0.121	0.129	0.136	0.152	0.189	0.197
0.3	0.053	0.076	0.129	0.159	0.182	0.212	0.220	0.242	0.288	0.295
0.4	0.068	0.106	0.189	0.220	0.250	0.280	0.303	0.341	0.386	0.394
0.5	0.068	0.114	0.212	0.265	0.318	0.356	0.394	0.439	0.492	0.500
0.6	0.091	0.152	0.250	0.311	0.364	0.424	0.477	0.523	0.576	0.598
0.7	0.098	0.167	0.265	0.348	0.409	0.477	0.530	0.606	0.667	0.697
0.8	0.098	0.189	0.288	0.371	0.462	0.538	0.614	0.689	0.750	0.795
0.9	0.098	0.197	0.295	0.386	0.485	0.568	0.652	0.727	0.818	0.894
1.0	0.098	0.197	0.295	0.394	0.500	0.598	0.697	0.795	0.894	1.000

(b)

$$c(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) = \frac{\partial^2 C(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)}{\partial u_1 \partial u_2}$$

U/V	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.1	0.023	0.008	0.008	0.015	0.000	0.000	0.008	0.008	0.030	0.000
0.2	0.008	0.008	0.030	0.008	0.015	0.008	0.000	0.008	0.008	0.008
0.3	0.023	0.008	0.015	0.008	0.008	0.023	0.000	0.008	0.008	0.000
0.4	0.015	0.015	0.030	0.000	0.008	0.000	0.015	0.015	0.000	0.000
0.5	0.000	0.008	0.015	0.023	0.023	0.008	0.015	0.008	0.008	0.000
0.6	0.023	0.015	0.000	0.008	0.000	0.023	0.015	0.000	0.000	0.015
0.7	0.008	0.008	0.000	0.023	0.008	0.008	0.000	0.030	0.008	0.008
0.8	0.000	0.023	0.000	0.000	0.030	0.008	0.023	0.000	0.000	0.015
0.9	0.000	0.008	0.000	0.008	0.008	0.008	0.008	0.000	0.030	0.030
1.0	0.000	0.000	0.000	0.008	0.008	0.015	0.015	0.023	0.008	0.030

Annexe F

SIMULATIONS ET CONSTRUCTION DE FONDS DE COUVERTURE À PARTIR DES FONCTIONS COPULES ET D'UN MODÈLE GARCH(1,1)

F.1 Tableaux sur l'effet de la diversification apportée par les fonds de couverture

Pour chaque simulation :

F C. : indique fonds de couverture,

Ind. : indique portefeuille indiciel et

Ptf. : indique le portefeuille composé de 10% de fonds de couverture et de 90% de portefeuille diversifié.

Simulation 1

	F C.	Ind.	Ptf.
1 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	1.613	0.392	0.514
Clayton	1.542	0.273	0.400
Gumbel	1.538	0.425	0.537
Frank	1.463	0.348	0.460
1 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	1.463	0.234	0.357
Clayton	1.506	0.303	0.423
Gumbel	1.467	0.332	0.445
Frank	1.580	0.370	0.491
1 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	1.488	0.290	0.410
Clayton	1.583	0.332	0.457
Gumbel	1.571	0.289	0.417
Frank	1.568	0.348	0.470
1 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	1.519	0.288	0.411
Clayton	1.593	0.344	0.469
Gumbel	1.592	0.307	0.436
Frank	1.536	0.339	0.459
1 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	1.533	0.326	0.447
Clayton	1.569	0.353	0.474
Gumbel	1.583	0.341	0.465
Frank	1.587	0.407	0.525

	F C.	Ind.	Ptf.
2 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.654	0.014	0.078
Clayton	0.824	-0.123	-0.028
Gumbel	0.797	0.109	0.178
Frank	0.819	0.334	0.382
2 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.815	0.151	0.217
Clayton	0.772	-0.033	0.047
Gumbel	0.821	0.161	0.228
Frank	0.695	0.166	0.219
2 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.766	0.175	0.234
Clayton	0.762	0.043	0.115
Gumbel	0.775	0.150	0.212
Frank	0.852	0.222	0.285
2 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.777	0.164	0.226
Clayton	0.794	0.111	0.180
Gumbel	0.810	0.159	0.224
Frank	0.865	0.266	0.326
2 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.788	0.148	0.212
Clayton	0.790	0.140	0.205
Gumbel	0.789	0.166	0.228
Frank	0.838	0.231	0.292

	F C.	Ind.	Ptf.
3 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.542	0.140	0.180
Clayton	0.542	0.135	0.176
Gumbel	0.542	0.128	0.169
Frank	0.542	0.136	0.176
3 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.542	0.136	0.176
Clayton	0.542	0.136	0.176
Gumbel	0.542	0.129	0.170
Frank	0.542	0.132	0.173
3 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.542	0.136	0.177
Clayton	0.542	0.135	0.176
Gumbel	0.542	0.131	0.172
Frank	0.542	0.136	0.177
3 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.542	0.136	0.177
Clayton	0.542	0.135	0.176
Gumbel	0.542	0.130	0.171
Frank	0.542	0.134	0.175
3 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.542	0.136	0.177
Clayton	0.542	0.136	0.176
Gumbel	0.542	0.134	0.175
Frank	0.542	0.135	0.176

	F C.	Ind.	Ptf.
4 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.326	0.107	0.129
Clayton	0.326	0.107	0.129
Gumbel	0.326	0.107	0.129
Frank	0.326	0.107	0.129
4 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.326	0.107	0.129
Clayton	0.326	0.107	0.129
Gumbel	0.326	0.107	0.129
Frank	0.326	0.107	0.129
4 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.326	0.107	0.129
Clayton	0.326	0.107	0.129
Gumbel	0.326	0.107	0.129
Frank	0.326	0.107	0.129
4 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.326	0.107	0.129
Clayton	0.326	0.107	0.129
Gumbel	0.326	0.107	0.129
Frank	0.326	0.107	0.129
4 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.326	0.107	0.129
Clayton	0.326	0.107	0.129
Gumbel	0.326	0.107	0.129
Frank	0.326	0.107	0.129

	F C.	Ind.	Ptf.
5 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.432	0.185	0.210
Clayton	0.350	0.146	0.166
Gumbel	0.214	0.056	0.072
Frank	0.240	0.021	0.043
5 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.355	0.148	0.169
Clayton	0.278	0.092	0.111
Gumbel	0.274	0.113	0.129
Frank	0.256	0.056	0.076
5 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.274	0.080	0.099
Clayton	0.280	0.119	0.135
Gumbel	0.261	0.087	0.104
Frank	0.295	0.103	0.122
5 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.322	0.095	0.118
Clayton	0.287	0.128	0.144
Gumbel	0.240	0.053	0.072
Frank	0.278	0.098	0.116
5 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.283	0.076	0.097
Clayton	0.293	0.138	0.154
Gumbel	0.248	0.060	0.079
Frank	0.286	0.088	0.108

Simulation 2

	F C.	Ind.	Ptf.
1 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	4.416	0.522	0.912
Clayton	4.402	-0.122	0.331
Gumbel	4.855	0.629	1.051
Frank	5.297	1.053	1.478
1 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	4.475	0.406	0.813
Clayton	4.589	0.330	0.756
Gumbel	4.624	0.416	0.837
Frank	5.017	0.874	1.289
1 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	4.610	0.486	0.899
Clayton	4.558	0.353	0.774
Gumbel	4.485	0.187	0.617
Frank	4.745	0.607	1.021
1 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	4.576	0.517	0.923
Clayton	4.612	0.476	0.890
Gumbel	4.605	0.119	0.568
Frank	4.638	0.460	0.878
1 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	4.582	0.518	0.924
Clayton	4.661	0.514	0.929
Gumbel	4.450	0.078	0.516
Frank	4.595	0.357	0.781

	F C.	Ind.	Ptf.
2 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	1.676	0.149	0.302
Clayton	1.737	0.062	0.230
Gumbel	1.597	0.004	0.163
Frank	1.612	0.073	0.227
2 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	1.622	0.089	0.242
Clayton	1.753	0.115	0.279
Gumbel	1.525	-0.017	0.138
Frank	1.638	0.012	0.175
2 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	1.612	0.083	0.236
Clayton	1.686	0.121	0.277
Gumbel	1.617	0.055	0.211
Frank	1.581	0.031	0.186
2 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	1.628	0.108	0.260
Clayton	1.648	0.097	0.253
Gumbel	1.617	0.061	0.216
Frank	1.585	0.044	0.198
2 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	1.644	0.138	0.289
Clayton	1.669	0.130	0.284
Gumbel	1.621	0.098	0.250
Frank	1.601	0.086	0.238

	F C.	Ind.	Ptf.
3 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.616	0.144	0.191
Clayton	0.651	0.140	0.192
Gumbel	0.670	0.209	0.255
Frank	0.639	0.138	0.188
3 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.636	0.144	0.193
Clayton	0.658	0.133	0.185
Gumbel	0.668	0.166	0.216
Frank	0.642	0.157	0.205
3 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.638	0.147	0.196
Clayton	0.662	0.130	0.183
Gumbel	0.659	0.153	0.204
Frank	0.619	0.141	0.189
3 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.643	0.146	0.196
Clayton	0.673	0.153	0.205
Gumbel	0.654	0.154	0.204
Frank	0.627	0.134	0.183
3 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.642	0.145	0.195
Clayton	0.663	0.139	0.191
Gumbel	0.650	0.150	0.200
Frank	0.634	0.140	0.189

	F C.	Ind.	Ptf.
4 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.358	0.085	0.112
Clayton	0.333	0.079	0.104
Gumbel	0.333	0.073	0.099
Frank	0.358	0.115	0.139
4 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.338	0.066	0.093
Clayton	0.352	0.080	0.107
Gumbel	0.345	0.091	0.116
Frank	0.360	0.114	0.139
4 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.355	0.090	0.117
Clayton	0.371	0.110	0.136
Gumbel	0.336	0.087	0.112
Frank	0.339	0.093	0.117
4 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.339	0.080	0.106
Clayton	0.341	0.088	0.114
Gumbel	0.336	0.090	0.114
Frank	0.335	0.084	0.109
4 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.340	0.085	0.111
Clayton	0.334	0.088	0.112
Gumbel	0.331	0.083	0.108
Frank	0.343	0.093	0.118

	F C.	Ind.	Ptf.
5 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.267	0.125	0.140
Clayton	0.268	0.134	0.147
Gumbel	0.267	0.131	0.144
Frank	0.267	0.128	0.142
5 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.267	0.128	0.142
Clayton	0.267	0.129	0.143
Gumbel	0.267	0.127	0.141
Frank	0.267	0.126	0.140
5 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.267	0.126	0.140
Clayton	0.267	0.128	0.142
Gumbel	0.267	0.127	0.141
Frank	0.267	0.130	0.144
5 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.267	0.126	0.140
Clayton	0.267	0.128	0.142
Gumbel	0.267	0.128	0.142
Frank	0.267	0.128	0.142
5 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.267	0.125	0.139
Clayton	0.267	0.127	0.141
Gumbel	0.267	0.128	0.142
Frank	0.267	0.128	0.142

Simulation 3

	F C.	Ind.	Ptf.
1 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	2.708	0.279	0.522
Clayton	2.743	0.400	0.634
Gumbel	2.634	0.316	0.548
Frank	2.729	0.388	0.622
1 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	2.730	0.322	0.563
Clayton	2.630	0.313	0.545
Gumbel	2.716	0.339	0.577
Frank	2.621	0.428	0.648
1 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	2.732	0.325	0.565
Clayton	2.599	0.323	0.551
Gumbel	2.729	0.344	0.583
Frank	2.674	0.439	0.663
1 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	2.732	0.346	0.585
Clayton	2.586	0.319	0.545
Gumbel	2.790	0.402	0.641
Frank	2.671	0.387	0.615
1 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	2.717	0.367	0.602
Clayton	2.629	0.343	0.572
Gumbel	2.768	0.370	0.610
Frank	2.692	0.377	0.608

	F C.	Ind.	Ptf.
2 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.999	0.248	0.323
Clayton	0.934	0.190	0.264
Gumbel	0.937	0.147	0.226
Frank	0.898	0.120	0.198
2 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	1.000	0.260	0.334
Clayton	0.957	0.205	0.280
Gumbel	0.921	0.156	0.233
Frank	0.877	0.115	0.191
2 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.996	0.239	0.314
Clayton	1.001	0.254	0.329
Gumbel	0.946	0.179	0.256
Frank	0.890	0.127	0.203
2 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.999	0.251	0.326
Clayton	0.974	0.226	0.301
Gumbel	0.941	0.196	0.271
Frank	0.900	0.119	0.197
2 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.991	0.227	0.304
Clayton	0.968	0.203	0.280
Gumbel	0.974	0.200	0.278
Frank	0.933	0.156	0.234

	F C.	Ind.	Ptf.
3 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.476	0.133	0.167
Clayton	0.501	0.157	0.192
Gumbel	0.576	0.005	0.062
Frank	0.607	0.291	0.322
3 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.569	0.101	0.148
Clayton	0.573	0.238	0.272
Gumbel	0.540	0.088	0.133
Frank	0.539	0.211	0.244
3 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.546	0.106	0.150
Clayton	0.473	0.185	0.214
Gumbel	0.620	0.156	0.202
Frank	0.547	0.192	0.227
3 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.525	0.119	0.160
Clayton	0.494	0.202	0.231
Gumbel	0.581	0.112	0.159
Frank	0.518	0.146	0.183
3 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.549	0.165	0.203
Clayton	0.491	0.169	0.201
Gumbel	0.583	0.111	0.158
Frank	0.545	0.171	0.208

	F C.	Ind.	Ptf.
4 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.275	0.087	0.106
Clayton	0.333	0.138	0.158
Gumbel	0.444	0.178	0.205
Frank	0.456	0.364	0.373
4 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.241	0.069	0.086
Clayton	0.363	0.158	0.178
Gumbel	0.297	0.068	0.091
Frank	0.421	0.264	0.280
4 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.216	0.069	0.084
Clayton	0.348	0.114	0.137
Gumbel	0.280	0.065	0.086
Frank	0.383	0.215	0.232
4 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.209	0.051	0.067
Clayton	0.300	0.082	0.104
Gumbel	0.290	0.065	0.088
Frank	0.344	0.200	0.214
4 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.229	0.075	0.091
Clayton	0.295	0.085	0.106
Gumbel	0.313	0.101	0.122
Frank	0.340	0.188	0.203

	F C.	Ind.	Ptf.
5 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.351	0.086	0.112
Clayton	0.351	0.101	0.126
Gumbel	0.344	0.043	0.073
Frank	0.379	0.105	0.132
5 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.338	0.072	0.098
Clayton	0.349	0.093	0.119
Gumbel	0.350	0.063	0.092
Frank	0.385	0.109	0.136
5 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.343	0.069	0.096
Clayton	0.343	0.087	0.113
Gumbel	0.347	0.060	0.088
Frank	0.372	0.103	0.130
5 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.344	0.067	0.095
Clayton	0.349	0.086	0.113
Gumbel	0.351	0.071	0.099
Frank	0.368	0.098	0.125
5 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.347	0.066	0.094
Clayton	0.348	0.075	0.103
Gumbel	0.354	0.071	0.100
Frank	0.358	0.088	0.115

Simulation 4

	F C.	Ind.	Ptf.
1 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	4.561	-0.669	-0.145
Clayton	4.757	-0.235	0.264
Gumbel	5.396	0.055	0.591
Frank	6.978	0.545	1.190
1 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	5.447	0.087	0.623
Clayton	4.969	0.961	1.363
Gumbel	5.810	0.421	0.961
Frank	5.952	0.027	0.621
1 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	5.302	0.085	0.608
Clayton	5.526	0.737	1.217
Gumbel	5.336	0.005	0.539
Frank	5.889	-0.134	0.469
1 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	5.094	0.167	0.661
Clayton	5.598	0.667	1.161
Gumbel	5.133	-0.015	0.501
Frank	5.931	0.180	0.757
1 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	5.222	0.133	0.643
Clayton	5.398	0.412	0.912
Gumbel	5.450	0.164	0.693
Frank	5.800	0.179	0.743

	F C.	Ind.	Ptf.
2 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	1.571	0.117	0.262
Clayton	1.442	0.218	0.340
Gumbel	1.506	-0.115	0.047
Frank	1.530	0.310	0.432
2 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	1.479	0.085	0.224
Clayton	1.324	0.037	0.165
Gumbel	1.499	0.040	0.186
Frank	1.410	0.161	0.286
2 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	1.421	0.099	0.232
Clayton	1.446	0.078	0.215
Gumbel	1.594	0.179	0.321
Frank	1.465	0.215	0.340
2 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	1.484	0.141	0.276
Clayton	1.469	0.118	0.253
Gumbel	1.530	0.158	0.295
Frank	1.492	0.213	0.341
2 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	1.546	0.199	0.333
Clayton	1.439	0.094	0.228
Gumbel	1.549	0.180	0.317
Frank	1.491	0.204	0.333

	F C.	Ind.	Ptf.
3 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.691	0.105	0.164
Clayton	0.691	0.108	0.166
Gumbel	0.691	0.111	0.169
Frank	0.691	0.111	0.169
3 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.691	0.096	0.156
Clayton	0.692	0.094	0.153
Gumbel	0.692	0.125	0.181
Frank	0.691	0.097	0.156
3 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.692	0.113	0.171
Clayton	0.692	0.108	0.166
Gumbel	0.691	0.105	0.164
Frank	0.691	0.099	0.158
3 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.692	0.121	0.178
Clayton	0.691	0.095	0.154
Gumbel	0.691	0.109	0.167
Frank	0.692	0.110	0.169
3 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.692	0.113	0.171
Clayton	0.691	0.095	0.154
Gumbel	0.691	0.103	0.162
Frank	0.691	0.103	0.162

	F C.	Ind.	Ptf.
4 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.328	0.113	0.135
Clayton	0.328	0.113	0.135
Gumbel	0.328	0.113	0.135
Frank	0.328	0.113	0.135
4 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.328	0.113	0.135
Clayton	0.328	0.113	0.135
Gumbel	0.328	0.113	0.135
Frank	0.328	0.113	0.135
4 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.328	0.113	0.135
Clayton	0.328	0.113	0.135
Gumbel	0.328	0.113	0.135
Frank	0.328	0.113	0.135
4 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.328	0.113	0.135
Clayton	0.328	0.113	0.135
Gumbel	0.328	0.113	0.135
Frank	0.328	0.113	0.135
4 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.328	0.113	0.135
Clayton	0.328	0.113	0.135
Gumbel	0.328	0.113	0.135
Frank	0.328	0.113	0.135

	F C.	Ind.	Ptf.
5 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.218	-0.030	-0.005
Clayton	0.240	0.105	0.118
Gumbel	0.221	0.038	0.056
Frank	0.212	0.102	0.113
5 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.220	-0.016	0.008
Clayton	0.233	0.061	0.078
Gumbel	0.223	0.051	0.069
Frank	0.215	0.013	0.033
5 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.219	-0.009	0.014
Clayton	0.225	0.033	0.052
Gumbel	0.222	0.062	0.078
Frank	0.215	0.009	0.029
5 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.217	0.009	0.030
Clayton	0.223	0.055	0.072
Gumbel	0.223	0.058	0.074
Frank	0.217	0.037	0.055
5 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.218	0.036	0.054
Clayton	0.218	0.047	0.064
Gumbel	0.223	0.048	0.066
Frank	0.221	0.027	0.046

Simulation 5

	F C.	Ind.	Ptf.
1 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	2.014	0.246	0.423
Clayton	2.192	0.611	0.770
Gumbel	2.003	0.387	0.548
Frank	1.987	0.645	0.779
1 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	1.809	0.276	0.429
Clayton	2.028	0.492	0.646
Gumbel	1.924	0.514	0.655
Frank	1.741	0.360	0.498
1 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	1.777	0.382	0.521
Clayton	1.894	0.500	0.640
Gumbel	1.815	0.404	0.545
Frank	1.642	0.321	0.453
1 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	1.907	0.386	0.538
Clayton	1.802	0.351	0.496
Gumbel	1.772	0.320	0.465
Frank	1.699	0.265	0.409
1 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	1.948	0.398	0.553
Clayton	1.690	0.294	0.434
Gumbel	1.744	0.358	0.496
Frank	1.773	0.349	0.491

	F C.	Ind.	Ptf.
2 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.657	0.010	0.075
Clayton	0.644	0.157	0.206
Gumbel	0.690	0.164	0.217
Frank	0.824	0.232	0.292
2 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.742	0.055	0.124
Clayton	0.686	0.209	0.256
Gumbel	0.735	0.179	0.235
Frank	0.751	0.158	0.217
2 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.779	0.123	0.188
Clayton	0.752	0.168	0.227
Gumbel	0.767	0.171	0.230
Frank	0.780	0.179	0.239
2 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.775	0.137	0.201
Clayton	0.762	0.173	0.232
Gumbel	0.746	0.157	0.216
Frank	0.780	0.193	0.252
2 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.754	0.155	0.215
Clayton	0.754	0.174	0.232
Gumbel	0.719	0.143	0.200
Frank	0.761	0.177	0.236

	F C.	Ind.	Ptf.
3 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.669	0.177	0.226
Clayton	0.586	0.137	0.182
Gumbel	0.634	0.252	0.290
Frank	0.615	0.101	0.152
3 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.581	0.122	0.168
Clayton	0.607	0.141	0.188
Gumbel	0.595	0.146	0.191
Frank	0.604	0.104	0.154
3 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.583	0.130	0.175
Clayton	0.579	0.111	0.158
Gumbel	0.646	0.189	0.235
Frank	0.620	0.139	0.187
3 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.602	0.133	0.180
Clayton	0.599	0.122	0.170
Gumbel	0.623	0.168	0.213
Frank	0.609	0.124	0.172
3 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.597	0.137	0.183
Clayton	0.605	0.144	0.190
Gumbel	0.623	0.168	0.213
Frank	0.607	0.121	0.169

	F C.	Ind.	Ptf.
4 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.336	0.091	0.115
Clayton	0.336	0.075	0.101
Gumbel	0.336	0.091	0.116
Frank	0.336	0.109	0.132
4 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.336	0.068	0.095
Clayton	0.336	0.072	0.099
Gumbel	0.336	0.084	0.109
Frank	0.336	0.088	0.113
4 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.336	0.066	0.093
Clayton	0.336	0.078	0.104
Gumbel	0.336	0.078	0.104
Frank	0.336	0.090	0.115
4 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.336	0.069	0.096
Clayton	0.336	0.075	0.102
Gumbel	0.336	0.083	0.109
Frank	0.336	0.090	0.114
4 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.336	0.072	0.099
Clayton	0.336	0.074	0.100
Gumbel	0.336	0.078	0.104
Frank	0.336	0.085	0.110

	F C.	Ind.	Ptf.
5 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.242	0.090	0.105
Clayton	0.250	0.112	0.126
Gumbel	0.091	-0.094	-0.076
Frank	0.086	0.044	0.048
5 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.270	0.127	0.142
Clayton	0.244	0.028	0.050
Gumbel	0.064	-0.022	-0.013
Frank	0.082	0.057	0.059
5 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.161	0.029	0.042
Clayton	0.209	0.050	0.066
Gumbel	0.145	0.057	0.066
Frank	0.194	0.130	0.136
5 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.142	0.018	0.030
Clayton	0.210	0.038	0.055
Gumbel	0.186	0.086	0.096
Frank	0.210	0.143	0.150
5 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.158	0.022	0.036
Clayton	0.234	0.082	0.097
Gumbel	0.178	0.083	0.092
Frank	0.219	0.146	0.153

Simulation 6

	F C.	Ind.	Ptf.
1 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	1.282	-0.022	0.109
Clayton	2.364	0.724	0.889
Gumbel	1.354	-0.515	-0.328
Frank	1.890	0.630	0.756
1 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	1.306	-0.020	0.112
Clayton	1.833	0.422	0.563
Gumbel	1.614	-0.017	0.147
Frank	1.517	0.385	0.499
1 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	1.317	0.058	0.184
Clayton	1.771	0.429	0.564
Gumbel	1.673	0.189	0.338
Frank	1.611	0.298	0.430
1 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	1.484	0.183	0.313
Clayton	1.720	0.438	0.567
Gumbel	1.592	0.346	0.471
Frank	1.604	0.311	0.441
1 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	1.655	0.382	0.509
Clayton	1.662	0.368	0.498
Gumbel	1.668	0.370	0.500
Frank	1.628	0.309	0.442

	F C.	Ind.	Ptf.
2 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	1.361	0.503	0.589
Clayton	0.858	-0.066	0.027
Gumbel	0.947	-0.014	0.082
Frank	1.297	0.298	0.398
2 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	1.206	0.341	0.428
Clayton	0.953	0.110	0.194
Gumbel	1.094	0.147	0.242
Frank	1.125	0.101	0.204
2 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	1.097	0.301	0.380
Clayton	1.045	0.291	0.366
Gumbel	1.187	0.240	0.335
Frank	1.165	0.193	0.290
2 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	1.083	0.265	0.347
Clayton	1.098	0.240	0.326
Gumbel	1.197	0.303	0.392
Frank	1.128	0.146	0.244
2 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	1.082	0.221	0.307
Clayton	1.146	0.244	0.334
Gumbel	1.174	0.253	0.345
Frank	1.055	0.143	0.235

	F C.	Ind.	Ptf.
3 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.657	0.224	0.268
Clayton	0.612	0.134	0.182
Gumbel	0.673	0.163	0.214
Frank	0.667	0.142	0.195
3 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.654	0.186	0.233
Clayton	0.595	0.098	0.148
Gumbel	0.675	0.175	0.225
Frank	0.655	0.129	0.182
3 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.630	0.157	0.204
Clayton	0.601	0.120	0.168
Gumbel	0.651	0.151	0.201
Frank	0.616	0.121	0.171
3 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.630	0.157	0.204
Clayton	0.597	0.103	0.153
Gumbel	0.637	0.142	0.191
Frank	0.608	0.109	0.159
3 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.621	0.147	0.194
Clayton	0.594	0.102	0.151
Gumbel	0.637	0.144	0.194
Frank	0.605	0.108	0.157

	F C.	Ind.	Ptf.
4 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.292	0.147	0.161
Clayton	0.120	0.012	0.023
Gumbel	0.230	0.116	0.127
Frank	0.294	0.174	0.186
4 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.275	0.132	0.147
Clayton	0.148	0.021	0.033
Gumbel	0.212	0.140	0.147
Frank	0.276	0.170	0.181
4 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.291	0.153	0.167
Clayton	0.174	0.074	0.084
Gumbel	0.259	0.164	0.173
Frank	0.269	0.145	0.158
4 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.300	0.165	0.178
Clayton	0.152	0.063	0.072
Gumbel	0.274	0.142	0.155
Frank	0.289	0.145	0.159
4 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.299	0.165	0.179
Clayton	0.172	0.067	0.078
Gumbel	0.267	0.121	0.135
Frank	0.254	0.129	0.141

	F C.	Ind.	Ptf.
5 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.240	0.112	0.125
Clayton	0.258	0.117	0.131
Gumbel	0.221	0.086	0.100
Frank	0.208	0.093	0.104
5 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.252	0.111	0.125
Clayton	0.236	0.104	0.117
Gumbel	0.229	0.103	0.115
Frank	0.205	0.089	0.100
5 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.237	0.107	0.120
Clayton	0.236	0.108	0.120
Gumbel	0.235	0.106	0.119
Frank	0.225	0.101	0.113
5 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.232	0.098	0.112
Clayton	0.234	0.100	0.114
Gumbel	0.234	0.102	0.116
Frank	0.229	0.100	0.112
5 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.230	0.098	0.111
Clayton	0.237	0.108	0.121
Gumbel	0.235	0.098	0.112
Frank	0.234	0.103	0.116

Simulation 7

	F C.	Ind.	Ptf.
1 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	1.360	0.348	0.449
Clayton	1.736	0.215	0.367
Gumbel	1.266	0.186	0.294
Frank	1.503	0.337	0.454
1 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	1.354	0.214	0.328
Clayton	1.644	0.432	0.553
Gumbel	1.175	0.194	0.292
Frank	1.369	0.304	0.411
1 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	1.341	0.083	0.209
Clayton	1.567	0.366	0.486
Gumbel	1.424	0.244	0.362
Frank	1.444	0.277	0.394
1 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	1.411	0.131	0.259
Clayton	1.469	0.278	0.397
Gumbel	1.438	0.265	0.382
Frank	1.455	0.290	0.406
1 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	1.426	0.218	0.339
Clayton	1.466	0.348	0.460
Gumbel	1.484	0.399	0.508
Frank	1.473	0.308	0.424

	F C.	Ind.	Ptf.
2 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.627	0.106	0.158
Clayton	0.658	0.091	0.147
Gumbel	0.706	0.120	0.179
Frank	0.541	0.110	0.153
2 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.676	0.163	0.215
Clayton	0.692	0.158	0.211
Gumbel	0.704	0.179	0.231
Frank	0.555	0.141	0.183
2 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.669	0.160	0.211
Clayton	0.631	0.155	0.202
Gumbel	0.677	0.182	0.231
Frank	0.659	0.163	0.213
2 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.645	0.160	0.209
Clayton	0.658	0.177	0.225
Gumbel	0.655	0.186	0.233
Frank	0.666	0.177	0.226
2 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.652	0.159	0.208
Clayton	0.668	0.159	0.210
Gumbel	0.641	0.180	0.226
Frank	0.650	0.187	0.233

	F C.	Ind.	Ptf.
3 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.377	0.079	0.109
Clayton	0.384	0.096	0.125
Gumbel	0.406	0.134	0.161
Frank	0.389	0.087	0.117
3 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.342	0.081	0.108
Clayton	0.408	0.099	0.130
Gumbel	0.387	0.114	0.142
Frank	0.383	0.112	0.139
3 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.359	0.107	0.132
Clayton	0.392	0.108	0.136
Gumbel	0.379	0.116	0.143
Frank	0.373	0.105	0.132
3 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.361	0.106	0.131
Clayton	0.385	0.101	0.129
Gumbel	0.382	0.116	0.143
Frank	0.368	0.109	0.135
3 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.361	0.115	0.139
Clayton	0.385	0.111	0.138
Gumbel	0.373	0.106	0.133
Frank	0.369	0.101	0.128

	F C.	Ind.	Ptf.
4 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.371	0.131	0.155
Clayton	0.371	0.131	0.155
Gumbel	0.371	0.131	0.155
Frank	0.371	0.131	0.155
4 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.371	0.131	0.155
Clayton	0.371	0.131	0.155
Gumbel	0.371	0.131	0.155
Frank	0.371	0.131	0.155
4 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.371	0.131	0.155
Clayton	0.371	0.131	0.155
Gumbel	0.371	0.131	0.155
Frank	0.371	0.131	0.155
4 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.371	0.131	0.155
Clayton	0.371	0.131	0.155
Gumbel	0.371	0.131	0.155
Frank	0.371	0.131	0.155
4 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.371	0.131	0.155
Clayton	0.371	0.131	0.155
Gumbel	0.371	0.131	0.155
Frank	0.371	0.131	0.155

	F C.	Ind.	Ptf.
5 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.202	0.070	0.083
Clayton	0.206	0.056	0.071
Gumbel	0.210	0.078	0.091
Frank	0.240	0.131	0.142
5 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.190	0.070	0.082
Clayton	0.209	0.080	0.093
Gumbel	0.214	0.101	0.112
Frank	0.232	0.114	0.126
5 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.195	0.065	0.078
Clayton	0.212	0.089	0.101
Gumbel	0.210	0.090	0.102
Frank	0.225	0.102	0.114
5 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.208	0.074	0.087
Clayton	0.212	0.093	0.105
Gumbel	0.219	0.092	0.105
Frank	0.213	0.097	0.109
5 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.207	0.081	0.094
Clayton	0.207	0.090	0.102
Gumbel	0.220	0.092	0.105
Frank	0.223	0.098	0.110

Simulation 8

	F C.	Ind.	Ptf.
1 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	2.059	0.407	0.572
Clayton	1.777	0.249	0.402
Gumbel	2.139	0.429	0.600
Frank	2.038	0.326	0.497
1 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	1.990	0.305	0.474
Clayton	1.930	0.402	0.555
Gumbel	1.970	0.447	0.599
Frank	1.982	0.237	0.411
1 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	2.087	0.476	0.638
Clayton	1.961	0.308	0.473
Gumbel	1.974	0.435	0.589
Frank	1.994	0.264	0.437
1 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	2.072	0.427	0.592
Clayton	1.934	0.322	0.483
Gumbel	2.018	0.432	0.590
Frank	2.022	0.318	0.488
1 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	2.070	0.416	0.582
Clayton	1.955	0.344	0.505
Gumbel	2.009	0.324	0.493
Frank	2.036	0.315	0.487

	F C.	Ind.	Ptf.
2 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	1.562	0.034	0.187
Clayton	1.998	0.160	0.344
Gumbel	1.576	0.115	0.261
Frank	1.722	0.276	0.421
2 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	1.787	0.163	0.325
Clayton	1.722	0.173	0.328
Gumbel	1.521	0.125	0.265
Frank	1.757	0.279	0.427
2 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	1.744	0.143	0.304
Clayton	1.662	0.188	0.335
Gumbel	1.676	0.147	0.300
Frank	1.771	0.275	0.424
2 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	1.746	0.143	0.303
Clayton	1.679	0.141	0.294
Gumbel	1.709	0.170	0.324
Frank	1.703	0.147	0.303
2 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	1.693	0.130	0.287
Clayton	1.677	0.164	0.315
Gumbel	1.708	0.151	0.307
Frank	1.727	0.140	0.299

	F C.	Ind.	Ptf.
3 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.564	0.160	0.200
Clayton	0.414	0.031	0.070
Gumbel	0.541	0.157	0.195
Frank	0.402	0.121	0.149
3 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.495	0.111	0.150
Clayton	0.431	0.049	0.088
Gumbel	0.540	0.162	0.200
Frank	0.448	0.098	0.133
3 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.537	0.131	0.172
Clayton	0.487	0.122	0.158
Gumbel	0.589	0.172	0.214
Frank	0.529	0.140	0.179
3 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.535	0.131	0.172
Clayton	0.499	0.149	0.184
Gumbel	0.579	0.168	0.209
Frank	0.530	0.135	0.175
3 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.556	0.141	0.182
Clayton	0.498	0.132	0.169
Gumbel	0.582	0.157	0.200
Frank	0.568	0.122	0.167

	F C.	Ind.	Ptf.
4 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.322	0.090	0.113
Clayton	0.357	0.022	0.056
Gumbel	0.387	0.138	0.163
Frank	0.333	0.072	0.098
4 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.327	0.087	0.111
Clayton	0.371	0.086	0.115
Gumbel	0.365	0.104	0.131
Frank	0.350	0.059	0.089
4 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.322	0.073	0.098
Clayton	0.373	0.106	0.133
Gumbel	0.352	0.103	0.128
Frank	0.332	0.066	0.092
4 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.340	0.083	0.109
Clayton	0.371	0.112	0.138
Gumbel	0.353	0.104	0.129
Frank	0.337	0.064	0.092
4 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.344	0.077	0.103
Clayton	0.364	0.105	0.131
Gumbel	0.357	0.100	0.125
Frank	0.340	0.078	0.104

	F C.	Ind.	Ptf.
5 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.285	-0.021	0.009
Clayton	0.318	0.033	0.061
Gumbel	0.354	0.066	0.095
Frank	0.306	0.038	0.065
5 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.278	-0.008	0.021
Clayton	0.317	0.040	0.068
Gumbel	0.315	0.034	0.062
Frank	0.313	0.034	0.062
5 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.300	0.018	0.046
Clayton	0.319	0.040	0.068
Gumbel	0.321	0.057	0.084
Frank	0.315	0.027	0.056
5 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.307	0.019	0.048
Clayton	0.320	0.047	0.074
Gumbel	0.313	0.048	0.074
Frank	0.311	0.036	0.063
5 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.307	0.024	0.052
Clayton	0.318	0.034	0.063
Gumbel	0.312	0.044	0.071
Frank	0.316	0.036	0.064

Simulation 9

	F C.	Ind.	Ptf.
1 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	3.112	0.466	0.731
Clayton	2.947	0.505	0.750
Gumbel	3.443	0.034	0.375
Frank	3.081	0.244	0.528
1 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	2.948	0.339	0.600
Clayton	3.014	0.376	0.640
Gumbel	3.658	0.442	0.764
Frank	3.165	0.518	0.784
1 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	2.872	0.356	0.608
Clayton	2.947	0.548	0.788
Gumbel	3.374	0.551	0.834
Frank	3.316	0.550	0.827
1 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	2.863	0.274	0.533
Clayton	3.008	0.630	0.868
Gumbel	3.283	0.576	0.847
Frank	3.390	0.534	0.821
1 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	2.916	0.139	0.417
Clayton	3.094	0.532	0.789
Gumbel	3.153	0.603	0.859
Frank	3.245	0.606	0.870

	F C.	Ind.	Ptf.
2 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	1.591	0.109	0.257
Clayton	1.483	0.180	0.310
Gumbel	1.436	0.178	0.304
Frank	1.513	0.087	0.229
2 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	1.416	0.060	0.196
Clayton	1.424	0.265	0.381
Gumbel	1.285	0.119	0.235
Frank	1.476	0.059	0.200
2 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	1.528	0.094	0.238
Clayton	1.481	0.246	0.369
Gumbel	1.435	0.132	0.263
Frank	1.459	0.053	0.194
2 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	1.563	0.133	0.276
Clayton	1.472	0.171	0.301
Gumbel	1.442	0.124	0.256
Frank	1.473	0.139	0.273
2 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	1.494	0.123	0.261
Clayton	1.515	0.167	0.302
Gumbel	1.412	0.087	0.219
Frank	1.501	0.173	0.306

	F C.	Ind.	Ptf.
3 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.419	-0.056	-0.009
Clayton	0.490	0.161	0.193
Gumbel	0.527	0.095	0.139
Frank	0.424	0.009	0.051
3 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.434	0.005	0.048
Clayton	0.470	0.150	0.182
Gumbel	0.509	0.121	0.160
Frank	0.463	0.058	0.099
3 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.451	0.015	0.059
Clayton	0.468	0.082	0.121
Gumbel	0.506	0.091	0.132
Frank	0.466	0.009	0.055
3 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.438	0.007	0.050
Clayton	0.466	0.084	0.122
Gumbel	0.513	0.081	0.124
Frank	0.466	0.008	0.054
3 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.460	0.050	0.091
Clayton	0.464	0.076	0.115
Gumbel	0.495	0.094	0.134
Frank	0.476	0.065	0.107

	F C.	Ind.	Ptf.
4 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.320	0.074	0.099
Clayton	0.327	0.035	0.064
Gumbel	0.380	0.130	0.155
Frank	0.360	0.088	0.115
4 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.354	0.094	0.120
Clayton	0.352	0.065	0.094
Gumbel	0.364	0.091	0.118
Frank	0.347	0.077	0.104
4 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.361	0.085	0.113
Clayton	0.332	0.050	0.078
Gumbel	0.346	0.055	0.084
Frank	0.348	0.082	0.108
4 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.361	0.077	0.105
Clayton	0.342	0.061	0.089
Gumbel	0.341	0.057	0.086
Frank	0.345	0.079	0.106
4 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.361	0.082	0.110
Clayton	0.348	0.066	0.094
Gumbel	0.340	0.059	0.087
Frank	0.349	0.079	0.106

	F C.	Ind.	Ptf.
5 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.135	0.048	0.057
Clayton	0.138	0.110	0.112
Gumbel	0.137	0.085	0.090
Frank	0.138	0.114	0.116
5 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.134	0.040	0.049
Clayton	0.141	0.128	0.129
Gumbel	0.135	0.099	0.102
Frank	0.138	0.089	0.094
5 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.135	0.049	0.058
Clayton	0.141	0.111	0.114
Gumbel	0.137	0.102	0.106
Frank	0.139	0.100	0.103
5 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.137	0.075	0.081
Clayton	0.139	0.112	0.115
Gumbel	0.138	0.103	0.107
Frank	0.138	0.105	0.108
5 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.137	0.078	0.084
Clayton	0.139	0.121	0.123
Gumbel	0.139	0.106	0.110
Frank	0.139	0.112	0.115

Simulation 10

	F C.	Ind.	Ptf.
1 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	4.095	-0.450	0.006
Clayton	4.432	0.440	0.843
Gumbel	4.426	-0.151	0.309
Frank	6.094	0.527	1.084
1 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	4.382	0.136	0.561
Clayton	4.213	0.860	1.198
Gumbel	4.462	-0.012	0.437
Frank	5.275	0.602	1.071
1 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	4.549	0.387	0.805
Clayton	4.517	1.101	1.444
Gumbel	4.392	-0.081	0.368
Frank	4.817	0.666	1.082
1 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	4.629	0.412	0.835
Clayton	4.243	0.580	0.947
Gumbel	4.579	0.222	0.660
Frank	4.605	0.518	0.928
1 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	4.473	0.283	0.703
Clayton	4.177	0.334	0.719
Gumbel	4.619	0.367	0.794
Frank	4.695	0.301	0.741

	F C.	Ind.	Ptf.
2 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	1.549	0.191	0.327
Clayton	1.549	0.176	0.313
Gumbel	1.549	0.168	0.306
Frank	1.549	0.181	0.318
2 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	1.549	0.186	0.323
Clayton	1.549	0.189	0.325
Gumbel	1.549	0.142	0.283
Frank	1.549	0.190	0.326
2 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	1.549	0.187	0.323
Clayton	1.549	0.175	0.312
Gumbel	1.549	0.164	0.302
Frank	1.549	0.194	0.329
2 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	1.549	0.175	0.313
Clayton	1.549	0.186	0.322
Gumbel	1.549	0.171	0.309
Frank	1.549	0.191	0.327
2 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	1.549	0.189	0.325
Clayton	1.549	0.196	0.331
Gumbel	1.549	0.168	0.306
Frank	1.549	0.174	0.311

	F C.	Ind.	Ptf.
3 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.743	0.026	0.098
Clayton	0.778	0.158	0.220
Gumbel	0.761	0.104	0.169
Frank	0.755	0.127	0.189
3 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.736	0.083	0.148
Clayton	0.769	0.133	0.197
Gumbel	0.752	0.097	0.163
Frank	0.748	0.111	0.174
3 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.741	0.074	0.140
Clayton	0.737	0.091	0.155
Gumbel	0.731	0.100	0.163
Frank	0.751	0.106	0.171
3 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.748	0.076	0.143
Clayton	0.733	0.094	0.158
Gumbel	0.746	0.114	0.177
Frank	0.752	0.106	0.171
3 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.744	0.091	0.157
Clayton	0.728	0.093	0.157
Gumbel	0.742	0.104	0.168
Frank	0.747	0.113	0.177

	F C.	Ind.	Ptf.
4 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.442	0.046	0.086
Clayton	0.314	0.013	0.043
Gumbel	0.355	-0.015	0.022
Frank	0.494	0.166	0.199
4 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.394	0.063	0.096
Clayton	0.358	0.085	0.112
Gumbel	0.401	0.041	0.077
Frank	0.475	0.097	0.135
4 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.432	0.093	0.127
Clayton	0.310	0.011	0.041
Gumbel	0.415	0.072	0.106
Frank	0.471	0.092	0.130
4 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.410	0.083	0.116
Clayton	0.355	0.063	0.092
Gumbel	0.407	0.071	0.105
Frank	0.445	0.099	0.134
4 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.413	0.069	0.104
Clayton	0.388	0.091	0.120
Gumbel	0.377	0.038	0.072
Frank	0.447	0.076	0.113

	F C.	Ind.	Ptf.
5 Fonds : Échéance 6 mois-%/mois			
Gaussienne	0.406	0.265	0.279
Clayton	0.226	0.169	0.175
Gumbel	0.111	-0.101	-0.080
Frank	0.161	0.027	0.040
5 Fonds : Échéance 1 an-%/mois			
Gaussienne	0.310	0.192	0.204
Clayton	0.216	0.076	0.090
Gumbel	0.129	-0.021	-0.006
Frank	0.205	0.072	0.085
5 Fonds : Échéance 2 ans-%/mois			
Gaussienne	0.298	0.191	0.201
Clayton	0.207	0.086	0.098
Gumbel	0.165	0.008	0.023
Frank	0.270	0.119	0.134
5 Fonds : Échéance 3 ans-%/mois			
Gaussienne	0.310	0.195	0.207
Clayton	0.252	0.125	0.138
Gumbel	0.176	0.032	0.046
Frank	0.283	0.140	0.154
5 Fonds : Échéance 5 ans-%/mois			
Gaussienne	0.309	0.195	0.206
Clayton	0.282	0.151	0.164
Gumbel	0.226	0.087	0.101
Frank	0.265	0.118	0.133

Annexe G

CODE C

G.1 Simulation et mesure de la dépendance

```
//Bootstrap.cpp
/*****
**          Programme basé sur l'article de          **
**          Genest et Favre                          **
**          Everything you always want to know about **
**          Copula modeling but were afraid to ask   **
**                                                    **
**          *****/
//-----
#include <vcl\condefs.h>
#pragma hdrstop
#include "Bootstrap.h"
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include <conio.h>
#include <alloc.h>
#include "matrix.h"
#include "PseudoLikelihoodEstimator.h"
//-----
USERES("Bootstrap.res");
USEUNIT("Matrix.cpp");
USEUNIT("CopuleEmpirique.cpp");
USEUNIT("Rank.cpp");
USEUNIT("KendallTau.cpp");
```

```

USEUNIT("ChiPlot.cpp");
USEUNIT("GoodnessOfFit.cpp");
USEUNIT("cdf_N_0_1.cpp");
USEUNIT("K_Plot.cpp");
USEUNIT("Utilitaires.cpp");
USEUNIT("Genere_copule.cpp");
USEUNIT("SpearmanRho.cpp");
USEUNIT("PseudoLikelihoodEstimator.cpp");
//-----
FILE *outfile;
FILE *ChiPlotFile;
int lignes, cols;
    int i,j;
    int nrl;
    int nrh;
    int ncl;
    int nch;
int main(int argc, char **argv)
{
//****DEFINITIONS DES VARIABLES *****/
float *x,*y;
    int NombreIntervalles_u_v;
    int *LongueurVecteurChiPlot ;
float LongueurIntervalle_u_v; //longueur de intervalle sur (0,1)
    float *rendements;
float **Donnees;
float **Copule_u_v;
    float **copule_u_v; // la dérivée de la Copule_u_v
    float **ChiLambda;
    int nobs; //Le nombre d'observations
int *rangX, *rangY ;
    float tauK;
    float ThetaClayton;
    float ThetaGumbel;
    float Rho_P;
FILE *infile;
    FILE *RankFile; //Fichier qui garde les rangs//
    FILE *CopEmp; //Fichier txt qui conserve les valeurs de la Copule

```

```

FILE *CopEmpDel;//Fichier txt qui conserve les valeurs de la copule
/**OUVERTURE DES FICHIERS***/
//if((infile = fopen("Exponentiel.txt","r"))==NULL)
//if((infile = fopen("TestFile.txt","r"))==NULL)
//if((infile = fopen("SimulationGumel_1.txt","r"))==NULL)
//if((infile = fopen("Donnees.txt","r"))==NULL)
//if((infile = fopen("SimulationT_0.txt","r"))==NULL)
//if((infile = fopen("IndiceCadQuotidien.txt","r"))==NULL)
//if((infile = fopen("IndiceCadUSQuotidien.txt","r"))==NULL)
//if((infile = fopen("SP500_TSX_jan97_mai03.txt","r"))==NULL)
//if((infile = fopen("SP500_TSX_jan92_dec96.txt","r"))==NULL)
// if((infile = fopen("SMU_TSX.txt","r"))==NULL)
//if((infile = fopen("SMU_MSCI_Quotidien.txt","r"))==NULL)
//if((infile = fopen("TSX_MSCI_Quotidien.txt","r"))==NULL)
//if((infile = fopen("SP_MSCI_Quotidien.txt","r"))==NULL)
if((infile = fopen("TSX_SP_92_06Quotidien.txt","r"))==NULL)
//if((infile = fopen("TSX_SMU_quotidien.txt","r"))==NULL)
//if((infile = fopen("US_GlobalMaro.txt","r"))==NULL)
//if((infile = fopen("D:\\PhD\\These\\Programmes
    \\FichiersMatlab\\SauverVecteur_XY.txt","r"))==NULL)

{
printf("Incapable lire fichier initialisation\n");
getch();
exit(1);
}
if((outfile = fopen("output.txt","w"))==NULL)
{
printf("Incapable ouvrir fichier output\n");
getch();
exit(1);
}
if ((ChiPlotFile = fopen("ChiPlot.txt","w"))==NULL)
{
printf("Impossible ouvrir fichier ChiPlot\n");
getch();
}

```

```

        exit(1);
    }//if file
if ((RankFile = fopen("Rank_u_v.txt","w"))==NULL)
{
    printf("Impossible ouvrir fichier Rank_u_v\n");
    getch();
    exit(1);
} //if file
fscanf(infile,"lignes %d\n",&lignes);
fscanf(infile,"cols %d\n",&cols);
fscanf(infile,"NombreIntervalles_u_v %d\n",&NombreIntervalles_u_v );
printf( "%d %d %d\n",lignes,cols,NombreIntervalles_u_v );
//
    fprintf(outfile,"%d %d ",lignes,cols);
    fclose(outfile);
printf("Pierre Bouvier\n");
    nobs=cols;
//-----
//
//*****ALLOCATION DES MEMOIRES*****//
// Allocation de mémoire pour la matrice de valeurs
//
    if( (rendements = (float*)malloc(
        (lignes*cols+1)*sizeof(float)))==NULL)
    {
        printf("Erreur d'allocation de mémoire
pour la matrice des rendements\n");
        exit(0);
    }

//
//
// Allocation de la mémoire pour x et y
if( (x = (float*)malloc((cols+1)*sizeof(float)))==NULL)
{
    printf("Erreur d'allocation de mémoire pour x\n");
    exit(0);
}

```

```

        if( (y = (float*)malloc((cols+1)*sizeof(float)))==NULL)
        {
            printf("Erreur d'allocation de mémoire pour y\n");
            exit(0);
        }
        //Allocation de la mémoire pour LongueurVecteurChiPlot
        //
        if( (LongueurVecteurChiPlot =(int*)malloc(sizeof(int)))==NULL )
        {
            printf("Erreur d'allocation de
mémoire pour LongueurVecteurChiPlot\n");
            exit(0);
        }
        // Allocation de la mémoire pour chaque vecteur individuellement
        //

if( ( Donnees = (float**)malloc((lignes*cols+1)*sizeof(float*)))==NULL)
{
    printf("Erreur d'allocation de mémoire
pour la matrice des rendements\n");
    exit(0);
}
// Allocation de la mémoire pour pour la copule empirique
//
// Il faut calculer la taille de la matrice
// La taille dépend du nombre d'intervalles à l'intérieur
// du carré unitaire
// Le nombre de pas est donné par "intervalle_u_v"
//
// Fixer le nombre d'observations
//
LongueurIntervalle_u_v=1./NombreIntervalles_u_v ;
//Grandeur de la matrice c_u_v sur (0,1)^2
ncl=0;
nch=NombreIntervalles_u_v;
nrl=ncl;
nrh=nch;

```

```

// REMARQUE:
//La copule est initialisée en fonction du carré unitaire et
//non en fonction du nombre d'observations
Copule_u_v=matrix(nrl,nrh,ncl,nch);
  copule_u_v=matrix(nrl,nrh,ncl,nch);
  printf("Longueur de l'intervalle pour la copule empirique %f\n",
    LongueurIntervalle_u_v);

//

// Allocation de mémoire pour les rangs
//
if( (rangX = (int*)malloc((cols+1)*sizeof(int)))==NULL)
{
  printf("Erreur d'allocation de mémoire pour rangX\n");
  exit(0);
}

    if( (rangY = (int*)malloc((cols+1)*sizeof(int)))==NULL)
    {
      printf("Erreur d'allocation de mémoire pour rangY\n");
      exit(0);
    }

//Allocation de la mémoire pour les matrices et les vecteurs nécessaires
//au déroulement du programme
//
//Allocation de la matrice pour le vecteur ChiLambda Pour réaliser le
// Chi-Plot.
//
ChiLambda=matrix(0,2,0,cols);

//-----
// Lecture de rendements
//
//
//printf("Association du double pointeur donnees à rendements\n");
//printf("Nous montrons les deux façons de les écrire\n");
for (i=0; i<lignes; i++)

```

```

{
    for(j=0; j<cols; j++)
    {
        fscanf(infile,"%f",rendements);
        //printf("%f  ",*rendements);
        *Donnees=rendements++;
        //Adresse des rendements fixée à donnees
        //printf("%f\n",**Donnees);
        Donnees++;
    }//for j
} //for i
/*
printf("\n");
for (i=0; i<NombreIntervalles_u_v; i++)
{
    for(j=0; j<NombreIntervalles_u_v; j++)
    {
        printf("%f  ",Copule_u_v[i][j]);
    }//for j
    printf("\n");
} //for i
*/

//
// Manipulation des vecteurs de rangs
//
//Placer X à la bonne place
//
// Se replacer au début du pointeur
//On recule l'adresse au début du vecteur
Donnees-=lignes*cols;
//
//****SEPARER LES DONNEES EN VECTEURS DISTINCTS****//
//printf("\n\nNous sommes bien au début %f",**Donnees);
//    getch();
//    SepareVecteurs(Donnees, x, y);
//    printf("\n\n");
//

```



```

// Impression des deux vecteurs distincts
/*
printf("Le vecteur X et le vecteur Y séparés\n");
    for(i=0;i<cols;i++)
        {
            printf("%f %f\n",x[i],y[i]);
        }
*/
//Nous avons deux vecteurs x et y
//Il faut trouver les rangs de chacun de ces vecteurs
//
Rank(x,y,rangX,rangY,cols);
/*Sauver les rangs dans un fichier sous forme de deux vecteurs
**
**/
fprintf(RankFile,"Rank_x=[\n");
for(i=0;i<cols;i++)
    fprintf(RankFile,"%f ",(float)rangX[i]/(float)cols);
fprintf(RankFile,"]\nRank_y= [");
for(i=0;i<cols;i++)
    fprintf(RankFile,"%f ",(float)rangY[i]/(float)cols);
fprintf(RankFile,"]\n");
printf("\n");
//getch();
/*
printf("\n\nL E S  R A N G S\n\n");
for(i=0;i<cols;i++)
printf("%d %d\n",rangX[i],rangY[i]);
getch();
*/
//
//*****COPULE EMPIRIQUE*****//
// Calcul pour la copule empirique
//

if((CopEmp = fopen("CopuleEmpirique.txt","w"))==NULL)
{
    printf("Incapable d'ouvrir le fichier CopuleEmpirique.txt\n");
}

```

```

        getch();
    }
    if((CopEmpDel = fopen("CopuleEmiriqueDel.txt","w"))==NULL)
    {
        printf("Incapable ouvrir le fichier CopuleEmpiriqueDel.txt\n");
        getch();
    }
    printf("\n");
    CopuleEmpirique(rangX, rangY, cols, NombreIntervalles_u_v,
    LongueurIntervalle_u_v, Copule_u_v);
    for(i=0;i<NombreIntervalles_u_v;i++)
    {
        for(j=0;j<NombreIntervalles_u_v;j++)
        {
            printf("%5.3f  ",Copule_u_v[i][j]);
            fprintf(CopEmp,"%5.3f  ",Copule_u_v[i][j]);

            }//for j
            printf("\n");
            fprintf(CopEmp,"\n");
        } //for i
        fclose(CopEmp);
        printf("\nCopuleDérivée\n");
        //printf("test matrix %f\n",matrix(2.0,24.12));
        LatexCopuleEmpirique(Copule_u_v,NombreIntervalles_u_v,nobs);
        CalculeDelCopule(Copule_u_v, copule_u_v, NombreIntervalles_u_v);
        Latex_copuleEmpirique(copule_u_v,NombreIntervalles_u_v,nobs);
        for(i=0;i<NombreIntervalles_u_v;i++)
        {
            for(j=0;j<NombreIntervalles_u_v;j++)
            {
                printf("%5.3f  ",copule_u_v[i][j]);
                fprintf(CopEmpDel,"%5.3f  ",copule_u_v[i][j]);

            }//for j
            printf("\n");
            fprintf(CopEmpDel,"\n");
        } //for i

```

```

        fclose(CopEmpDel);
//
//*****KENDALL TAU*****//
//Calcul du tau de Kendall
tauK = KendallTau(rangX, rangY, cols);
printf("Tau de Kendall %f\n",tauK);
ThetaClayton=-2*tauK/(tauK-1);
ThetaGumbel=1/(1-tauK);
printf("Theta -- Clayton = %f\n",ThetaClayton);
printf("Theta -- Gumbel = %f\n",ThetaGumbel );
Rho_P= SpearmanRho(rangX, rangY, cols);
printf("Rho de Pearson %f\n",Rho_P);
//
//
//*****CHI-PLOT*****//
*LongueurVecteurChiPlot = cols;
ChiPlot( rangX, rangY, LongueurVecteurChiPlot, ChiLambda );
printf("LongueurVecteurChiPlot:  %d\n",*LongueurVecteurChiPlot);
fprintf(ChiPlotFile,"2  %d\n",*LongueurVecteurChiPlot);
fprintf(ChiPlotFile,"Data = [[" );

        for(i=0;i<*LongueurVecteurChiPlot;i++)
        {
        fprintf(ChiPlotFile,"%f ",ChiLambda[0][i]);
                // printf("%f ",ChiLambda[j][i]);
        }
        fprintf(ChiPlotFile,"]\n[" );
        for(i=0;i<*LongueurVecteurChiPlot;i++)
        {
        fprintf(ChiPlotFile,"%f ",ChiLambda[1][i] );
        }

        fprintf(ChiPlotFile,"]]" );
        fclose(ChiPlotFile);
//
//*****K-PLOT*****//
// -----
// Test d'adéquation -- transformation intégrale de probabilité

```

```

//
K_Plot( rangX, rangY, cols, NombreIntervalles_u_v, x, y, tauK);
//-----
//
//*****GOODNESS OF FIT*****//
// Test Goodness of Fit
//
printf("Cols : %d\n",cols);
GoodnessOfFit(rangX, rangY, cols, NombreIntervalles_u_v, Copule_u_v);
//printf("N(1) %f\n",cdf_N_0_1(-1));
//
//*****GENERE LES COPULE*****//
//
for (int c=1;c<5;c++) {
  Genere_copule(.5,c); }
//*****MAXIMUM PSEUDO-LIKELIHOOD ESTIMATOR****//
/*
double xxx;
nobs=cols;
xxx=P_mle( nobs, rangX, rangY);
printf("Maximum pseudo likelihood estimator %f\n",xxx);
*/
//*****FIN DU PROGRAMME*****//
//-----
        printf("Attention les Minous\n");
getch();
//-----
//
//*****VIDER LES MEMOIRES*****//
// free(rendements);
//delete rendements;
fclose(infile);
free(x);
free(y);
free(LongueurVecteurChiPlot);
free(Donnees);
free_matrix(Copule_u_v,nrl, nrh, ncl, nch) ;
free_matrix(copule_u_v,nrl, nrh, ncl, nch) ;

```

```

    free_matrix(ChiLambda,0,2,0,cols);
    //free(Copule_u_v);
    free(rangX);
    free(rangY);
}

//-----

void SepareVecteurs(float **donnees,float *X,float *Y)
{
    /*
    for (i=0; i<lignes; i++)
    {
        printf("\n");
        for(j=0; j<cols; j++)
        {
            printf(" %d %f\n",j+1,**donnees++);
        }//for j
    }//for i
    //Positionnement au début de la matrice donnees
    donnees-=cols*lignes;
    */
    //printf("\n\nle premier de tout%f\n\n", donnees[0][0]);

    //printf("Les deux cols doivent être identiques\n");

    for (i=0;i<cols;i++)
    {
        X[i]**donnees++;

        // printf("%f %f\n",X[i]**donnees++);
    }
    /*
    printf("Le nombre de cols: %d,
           ce qui suit sont les adresses de X et Y\n",cols);
    */
}

```

```
    for (i=0;i<=cols;i++)
        printf("%ld %ld\n",&X[i],&Y[i]);
    */
    for (i=0;i<cols;i++)
        Y[i]**donnees++;
}
```

G.2 Valorisation des options

```

//-----
#include <vcl\condefs.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include<conio.h>
#include<math.h>
//
#include "Matrix.h"
#include "Utilitaires.h"
#include "GenCopule.h"
#include "ValeurRainbow.h"
#include "Distribution_t.h"
#pragma hdrstop
//-----
USERES("Garch.res");
USEUNIT("Matrix.cpp");
USEUNIT("Utilitaires.cpp");
USEUNIT("GenCopule.cpp");
USEUNIT("ValeurRainbow.cpp");
//-----
int main(int argc, char **argv)
{
    int i,          //Compteur pour les titres
    j,             //Compteur pour les pas
        k,          //Compteur pour les simulations
        l, //Compteur pour les strikes
        m; //Compteur pour les résultats nbStrike*nType
    int nSim, //Nombre de simulations
        nbStrike,
                //Nombre de strikes différents alentour de 1
    daycount, //Nombre de jours
        nPas, //Nombre de pas dans la simulation (un par jour)
        dim; //Le nombre d'actifs sous-jacents
    int fctInd, //Fonction indicatrice
    freqDonnees; //Fréquence des données, e.g. 12 données mensuelles
    double *S_i, //La valeur de l'atif sous-jacent i

```

```

*X_i,          //Prix de levée pour l'option sur i
  *Sigma_i,    //Volatilité des rendements pour i
  *Strike,     //Vecteur de longueur nbStrike qui
                //contient les différents strikes
  sqrttdt,    //La racine carrée du temps
  T;          //Échéance de l'option exprimée en année(s)
double r_f;    //Taux de reedement sans risque exprimé annuel
double *h_i, //Variance conditionelle à t pour l'actif i
*eps_i, //Bruit blanc N(0,1) pour chq actif i
  *h_T, //Vecteur qui accumule les variances à l'échéance
  *khi_T, //Vecteur qui accumule les khi à l'échéance
                //(Neutre au risque)
  *Indice_T; //Vecteur qui accumule les indices à l'échéance
double *C_i, //Constante des rendements du modèle GARCH
*omega_i,
  *alpha_i,
  *beta_i;
double *z_i, //Nombre aléatoire selon une Copule choisie
*x_i, //Vecteur des rendements de chq actif à une période (* Mat Chol)
*r_i; //Rendement aléatoire pour l'actif i
double *VecteurMax, //Vecteur qui conserve les maximum de chq simulation
*VecteurMin; //Vecteur qui conserve les minimum de chq simulation
double **MatCov, //Matrice des covariance entre les actifs
**MatCor, //Matrice des corrélations
**L, //Transformée de Cholesky pour la matricce des var-covar (Lower -I)
  **CholTr; //Transposée de L
double Max, //Le maximum d'un vecteur
Min; //Le minimum d'un vecteur
double call_Max,
call_Min,
  put_Max,
  put_Min;
double Tau=.2,
Kendall_tau;
double **MatResults; //La matrice des résultats des simulations
int type; //Le type de copule à utiliser
int nType;
float valeur[15]; //Les valeurs lues à partir des fichiers d'entrée

```



```

FILE *DonneesActifs; //Fichier contenant la matrice des corrélations
FILE *GarchParam; //Fichier contenant les paramètres GARCH
//
printf("Model GARCH de DUAN-1993 Author Pierre Bouvier %9.8f\n",M_PI);
daycount=365;
nbStrike =7; //Évaluation de l'option avec 7 strikes différents
nType=4; //Le nombre de type de simulation
//1)Gaussien
//2)Clayton
//3)Gumbel
//4)Frank
//Assignment des fichiers
//
//Lire la matrice de corrélations ainsi que les paramètres de marché
//if( (DonneesActifs = fopen("Actifs.txt","r"))==NULL)
//if( (DonneesActifs = fopen("Boyle.txt","r"))==NULL)
//if( (DonneesActifs = fopen("EquityMkt_3.txt","r"))==NULL)
if( (DonneesActifs = fopen("EquityMkt_6.txt","r"))==NULL)
{
printf("Incapable ouvrir le fichier Actifs.txt\n");
getch();
exit(1);
}
// if( (GarchParam = fopen("ActifsGarch.txt","r"))==NULL)
//if( (GarchParam = fopen("ActifsGarch_3.txt","r"))==NULL)
if( (GarchParam = fopen("ActifsGarch_6.txt","r"))==NULL)
{
printf("Incapable ouvrir le fichier GarchParam.txt\n");
getch();
exit(1);
}
//----
//
//Lire les données
//
printf("Entrez le nombre de simulations >");
scanf("%d",&nSim);

```

```

fscanf(DonneesActifs,"%d",&dim);
printf("La copule sera de dimension %d\n",dim);
//
//Assigner les mémoires
MatCor = dmatrix(1, dim,1,dim); // matrice des corrélations
MatCov = dmatrix(1, dim,1,dim); // matrice des covarainces
L = dmatrix(1, dim,1,dim); // lower triangular
CholTr = dmatrix(1, dim,1,dim); // transposée de la lower
MatResults = dmatrix(1,nbStrike*(nType),1,4);
S_i = dvector(1, dim); // vecteur valeurs des sous-jacents
X_i = dvector(1, dim); // vecteur des strikes chq titre
Strike = dvector(1, nbStrike); // nombre de prix strikes différents
Sigma_i = dvector(1, dim); // vecteur contenant les vols
C_i = dvector(1, dim);
omega_i = dvector(1, dim);
alpha_i = dvector(1, dim);
beta_i = dvector(1, dim);
h_T = dvector(1, dim);
khi_T = dvector(1, dim);
Indice_T = dvector(1, dim);
z_i = dvector(1, dim);
x_i = dvector(1, dim);
r_i = dvector(1, dim);
h_i = dvector(1, dim);
eps_i = dvector(1, dim);
VecteurMax = dvector(1, nSim);
VecteurMin = dvector(1, nSim);
//Pour chaque titre il y a trois données à lire
//
//1) La valeur de S_t
//2) La moneyness ou le strike
//3) La volatilité
//
//Nous devons effectuer autant d'opérations qu'il y a de titres
//lire la dimension de la copule dim

for (j=1;j<=dim;j++)
{

```

```

        for(i=0;i<3;i++) //Lire les trois données
fscanf(DonneesActifs,"%f",&valeur[i]);
S_i[j]=(double)valeur[0];
    X_i[j]=(double)valeur[1];
    Sigma_i[j]=(double)valeur[2];
    fscanf(DonneesActifs,"\n");
} //j
//Lire la matrice des corrélations
for(i=1;i<=dim;i++)
{
    for(j=1;j<=dim;j++)
    {
        fscanf(DonneesActifs,"%f",&valeur[j]);
        MatCor[i][j]=valeur[j];
    } //j
    fscanf(DonneesActifs,"\n");
} //i
//Lire le taux sans risque et l'échéance de l'option
fscanf(DonneesActifs,"%f",&valeur[1]);
fscanf(DonneesActifs,"%f",&valeur[2]);
    fscanf(DonneesActifs,"\n");
//Lire le tau de Kendall pour
//le paramètre des simulations avec les copules
//Archimédiennes
fscanf(DonneesActifs,"%f",&valeur[1]);
    Kendall_tau=valeur[1];
    printf("Le tau de Kendall : %7.5f  Rho %7.5f\n\n\n",
        Kendall_tau,sin(0.5*M_PI*Kendall_tau));
//Écrire les données lues
printf(" valeur          srtike    sigma\n");
for(i=1;i<=dim;i++)
{
    printf("%f %f %f\n",S_i[i],X_i[i],Sigma_i[i]);
}
printf("La matrice de correlation lue\n");
dprint_Matrix(MatCor,dim,dim);
r_f =(double)valeur[1];
    T =(double)valeur[2];

```

```

    nPas    = T*daycount;
//
//Ramener r_f sous une base de daycount
//
r_f /=(double)daycount;
    printf("Le nombre de pas par simulation
           %d taux sans risque par pas %8.6f\n",nPas,r_f);
//
//Calculer la matrice des covariances
//
for (i=1;i<=dim;i++)
{
    for (j=1;j<=dim;j++)
    {
        MatCov[i][j]=Sigma_i[i]*Sigma_i[j]*MatCor[i][j];
    }//j
} //i

printf("La matrice des covariances\n");
dprint_Matrix(MatCov,dim,dim);
//
//Calculer la transformée de Cholesky de la matrice des corrélations
//
    Chol(MatCor,L,CholTr,dim);
//
printf("La transformee de Cholesky de la matrice des correlations\n");
dprint_Matrix(L,dim,dim);

//
//Lire les paramètres GARCH pour les dim titres
//
//Lire la fréquence des données (freqDonnees)
//
    fscanf(GarchParam,"%d\n",&freqDonnees);
//
for(i=1;i<=dim;i++)
{
    //Pour chaque titre il y a quatre valeur

```

```

        //à lire du fichier GarchParam
        for(j=1;j<=4;j++)
        {
            fscanf(GarchParam,"%f",&valeur[j]);
        }
        C_i[i] =(double)valeur[1];
        omega_i[i] =(double)valeur[2]/sqrt(double(freqDonnees));
        beta_i[i] =(double)valeur[3];
        alpha_i[i] =(double)valeur[4];
        fscanf(GarchParam,"\n");
    }
//Écrire les paramètres GARCH
//
//Il y a quatre paramètres à écrire
//
printf("La frequence des donnees est de %d observations p.a. \n\n"
, freqDonnees);
printf("C_i  omega_i  alpha_i  beta_i  Persistence\n");
    for(i=1;i<=dim;i++)
    {
        printf("%f  %12.10f  %f  %f",C_i[i],omega_i[i],
            alpha_i[i],beta_i[i]);
        printf("      %12.10f \n",alpha_i[i]+beta_i[i]);
    }//getche();

//
// Chacune des simulations doit être initialisée
// aux valeurs initiales de chq paramètre
//
printf("\n");

//
//Établir les différents strikes pour l'analyse
//
for (i=1;i<=nbStrike;i++)
{
    Strike[i]=0.80 + .05*i; //le premier strike
                        //est ainsi établi à 0.85
}

```

```

//le dernier à 1.15 avec nbStrike = 7
    } //nstrikes
//
// Nous faisons une simulation de longueur nSim pour tous les strikes
// nous réutilisons les mêmes valeurs simulée, uniquement les prix
// de levée changent
//
//1231243131312312312312312312312312313131321313131313213212313123123//
m=0;
for(type=1;type<=nType;type++)
{
for(l=1;l<=nbStrike;l++)
{
fctInd=0;
for(k=1;k<=nSim;k++)
{
for(i=1;i<=dim;i++)
{
eps_i[i]=0.0;
h_i[i]=0.0;
r_i[i]=0.0;
Indice_T[i]=0.0;
h_T[i]=0.0;
}
switch (type)
{
case 1: VecteurNormal_0_1( z_i, dim);
dMatVecteur(L, z_i, eps_i, dim, dim, dim);
break;
case 2: CopuleClayton_d ( eps_i, dim,Kendall_tau);
break;
case 3: CopuleGumbel_d ( eps_i, dim,Kendall_tau);
break;
case 4: CopuleFrank_d (eps_i, dim,Kendall_tau);
break;
break;
default : VecteurNormal_0_1( z_i, dim);
dMatVecteur(L, z_i, eps_i, dim, dim, dim);
}
}
}
}
}

```

```

        }//switch
        for(i=1;i<=dim;i++)
        {
            //Variance conditionnelle initiale
            h_i[i] = omega_i[i]/(1-alpha_i[i]-beta_i[i]);
                //premier nombre aléatoire
            eps_i[i] *= sqrt(h_i[i]);
            r_i[i] = r_f - 0.5*h_i[i] + eps_i[i];
            khi_T[i]=eps_i[i];
            Indice_T[i]=0.0;
            h_T[i]=h_i[i];
        }//i
        //
        //Pas à pas pour l'échéance
        //
        for(j=1;j<=nPas;j++)
        {
            //
            //Appliquer la transformée de Cholesky à un vecteur normal
                //de dimension dim
            //Nous obtenons le vecteur x_i qui lui est aussi de loi Normale,
            //Chacune des valeurs obtenus sont corrélés par la matrice des
            //Corrélations
            //

            switch (type)
            {
                case 1: VecteurNormal_0_1( z_i, dim);
                    dMatVecteur(L, z_i, eps_i, dim, dim, dim);
                    break;
                case 2: CopuleClayton_d ( eps_i, dim,Tau);
                    break;
                case 3: CopuleGumbel_d ( eps_i, dim,Tau);
                    break;
                case 4: CopuleFrank_d (eps_i, dim,Tau);
                    break;
                default: VecteurNormal_0_1 ( z_i, dim);
                    dMatVecteur(L, z_i, eps_i, dim, dim, dim);
            }//switch

```

```

//Pour chaque titre
for(i=1;i<=dim;i++)
{
    eps_i[i] *= sqrt(h_i[i]);
    h_i[i]=omega_i[i]+beta_i[i]*h_i[i]+alpha_i[i]*
        (r_i[i]-C_i[i])*(r_i[i]-C_i[i]);
    r_i[i]=r_f-0.5*h_i[i]+eps_i[i];
    //Les accumulateurs jusqu'à l'échéance
    h_T[i]      += h_i[i];
    khi_T[i] += eps_i[i];
} //i
} //j
for(i=1;i<=dim;i++)
{
    Indice_T[i]=S_i[i]*exp(r_f*T -0.5*h_T[i]+khi_T[i]);
        //eqn (2.4) Duan-93 p17

} //i
Max=Maximum(Indice_T,dim);
Min=Minimum(Indice_T,dim);
if(Max>=Strike[l])fctInd++;
//Conserver chaque valeur
VecteurMax[k]=Max;
VecteurMin[k]=Min;
} //k nombre simulations
printf("\n\nProbabilite que le Call On Max expire
        ITM est %5.4f avec un strike de %4.2f\n",
(double)fctInd/(double)nSim,Strike[l]);
switch (type)
{
    case 1:    printf("Copule Gaussienne\n");
        break;
    case 2:    printf("Copule Clayton\n");
        break;
    case 3:    printf("Copule Gumbel\n");
        break;
    case 4:    printf("Copule Frank\n");
}

```



```
free_dvector(S_i,1, dim);          //Le vecteur des valeur sous-jacents
free_dvector(X_i,1, dim); //Le vecteur des strikes
    free_dvector(Strike,1, nbStrike);
    free_dvector(Sigma_i,1, dim); //Le vecteur contenant les vols
    free_dvector(C_i,1, dim);
    free_dvector(omega_i,1, dim);
    free_dvector(alpha_i,1, dim);
    free_dvector(beta_i,1, dim);
    free_dvector(h_T,1,dim);
    free_dvector(khi_T,1,dim);
    free_dvector(Indice_T,1,dim);
    free_dvector(z_i,1,dim);
    free_dvector(x_i,1,dim);
    free_dvector(r_i,1,dim);
    free_dvector(h_i,1,dim);
    free_dvector(eps_i,1,dim);
free_dvector(h_T, 1, dim);
    free_dvector(Indice_T, 1, dim);
    free_dvector(khi_T, 1, dim);
    free_dvector(VecteurMax,1,nSim);
    free_dvector(VecteurMin,1,nSim);
return 0;
}
```

G.3 Options Monte Carlo

```

//-----
#include <vcl\condefs.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include <math.h>
#include <conio.h>
#include "matrix.h"
#include "GenereNombre.h"

#pragma hdrstop
//-----
USERES("MC_rainbow.res");
USEUNIT("Matrix.cpp");
USEUNIT("GenereNombre.cpp");
USEUNIT("Utilitaires.cpp");
USEUNIT("FonctionPricing.cpp");
USEUNIT("kiss.cpp");
//-----
int main(int argc, char **argv)
{
int i,
j;
int nobs, //nombre d'observations pour la copule générée
dim; //dimension de la copule
double tau,
rho;
float param;
float valeur[15]; // les valeurs qui doivent être
// lues dans le fichier d'entrée
double **R, // Les rendements selon des normales N(0,1) corrélés
**ST, // Les prix à la fin de chq trajectoire
**matCor; //la matrice des corrélations
double *S_i,
*X_i,
*Sigma_i,
r_f,

```

```

        T;
double *d_i_z; //Pour mesurer la probabilité que l'actif expire ITM
double callMax,
callMin,
        putMax,
putMin;
double *maxObs, //La valeur de l'actif qui a atteint le maximum
        *minObs; //La valeur de l'actif qui a atteint le minimum
FILE *DonneesActifs;
FILE *Resultats;
FILE *Rendements;
//Projet qui clacule une option rainbow sur
//plusieurs actifs financiers
printf("Simulations de Monte Carlo pour valorisier une option
        //de type Rainbow\n");
printf("Avec plusieurs actifs financiers sous-jacents\n");
printf("Pierre Bouvier\n");
//Le nombre de simulations souhaitées
printf("Entrer le nombre d'observations souhaitées....>");
scanf("%d",&nobs);
//nobs=10000;
//
//nobs=500;
//
//Lire les données de marché.
//
//if( (DonneesActifs = fopen("ActifsBoyle.txt","r"))==NULL)
//if( (DonneesActifs = fopen("Actifs.txt","r"))==NULL)
//if( (DonneesActifs = fopen("D:\\PhD\\These
        //\\Programmes\\FichiersC\\Rainbow\\Actifs_3d.txt","r"))==NULL)
//if( (DonneesActifs = fopen("Actifs_3dCorr.txt","r"))==NULL)
if( (DonneesActifs = fopen("D:\\PhD\\These
        //\\Programmes\\FichiersC\\Rainbow\\EquityMkt_6.txt","r"))==NULL)
{
    printf("Incapable ouvrir le fichier Actifs_3d.txt\n");
    getch();
    exit(1);
}

```

```

fscanf(DonneesActifs,"%d\n",&dim);
printf("Les simulations seront de dimension %d\n",dim);
//Fichiers pour écrire les résultats
if( (Resultats= fopen("ResultsSimMC3_d.txt","w"))==NULL)
{
    printf("Incapable ouvrir le fichier d'impression\n");
    getch();
    exit(0);
}
if( (Rendements= fopen("RendementsSimule.txt","w"))==NULL)
{
    printf("Incapable ouvrir le fichier d'impression\n");
    getch();
    exit(0);
}
//getch();
//Il faut définir les matrices qui devront contenir
//les vecteurs des copules générés
//La matrice Copule contient toutes les valeurs des dim vecteurs U(0,1)
/* Allouer les vecteurs et les matrices pour les opérations à effectuer
*/
R = dmatrix(1,nobs,1,dim);
    //La matrice qui contient les rendements corrélés
ST = dmatrix(1,nobs,1,dim);
    //La matrice qui contient les valeurs finale de S_t
matCor = dmatrix(1,dim,1,dim);
    //La matrice des corrélations
S_i=dvector(1, dim);
X_i=dvector(1, dim);
Sigma_i=dvector(1, dim);
d_i_z=dvector(1, dim);
maxObs = dvector(1,nobs);
minObs = dvector(1,nobs);
//Pour chaque titre il y a trois données à lire
//
//1) La valeur de S_t
//2) La moneyness ou le strike
//3) La volatilité

```

```

//
//Nous devons effectuer autant d'opérations qu'il y a de titres
//lire la dimension de la copule dim

for (j=1;j<=dim;j++)
{
    for(i=0;i<3;i++)
fscanf(DonneesActifs,"%f",&valeur[i]);
S_i[j]=(double)valeur[0];
    X_i[j]=(double)valeur[1];
    Sigma_i[j]=(double)valeur[2];
    fscanf(DonneesActifs,"\n");
} //j
//Lire la matrice des corrélations
for(i=1;i<=dim;i++)
{
    for(j=1;j<=dim;j++)
    {
        fscanf(DonneesActifs,"%f",&valeur[j]);
        matCor[i][j]=valeur[j];
    } //j
    fscanf(DonneesActifs,"\n");
} //i
//Lire le taux sans risque et l'échéance de l'option
fscanf(DonneesActifs,"%f",&valeur[1]);
fscanf(DonneesActifs,"%f",&valeur[2]);

//Écrire les données lues
printf(" valeur      srtike      sigma\n");
for(i=1;i<=dim;i++)
{
    printf("%f %f %f\n",S_i[i],X_i[i],Sigma_i[i]);
}
printf("La matrice de corrélation lue\n");
for(i=1;i<=dim;i++)
{
    for(j=1;j<=dim;j++)
    {

```

```

        printf("%f ",matCor[i][j]);
    }//j
    printf("\n");
} //i
r_f=(double)valeur[1];
T= (double)valeur[2];
printf("r_f : %f\n",r_f);
printf("Échéance : %f\n",T);
//Calcul des rendements corrélés
printf("Génération de %d pour %d simulations en cours\n",nobs,dim);
//printf("P a t i e n c e ..... \n");
GenereDistGaussienneCorr(matCor, dim, nobs, R);
//Imprimer vecteur rendement
/**
for (i=1;i<=nobs;i++)
{
for(j=1;j<=dim;j++)
{
    fprintf(Rendements,"%5.4f ",R[i][j]);
} //j
fprintf(Rendements,"\n");
} //i
/**/
//Calcul des prix d'arrivés
CalculPrixFinPeriode(S_i,nobs,dim,Sigma_i,T,r_f,R,ST);
//Imprimer vecteur prix
/*
for (i=1;i<=nobs;i++)
{
printf(" %d ",i);
for(j=1;j<=dim;j++)
{
    printf(" %5.4f ",ST[i][j]);
} //j
printf("\n");
} //i
*/
//Déterminer pour chaque simulation la valeur maximum

```

```

//et minimum de l'actif
max_minChqObs(ST, nobs, dim, maxObs, minObs );
/*
for(i=1;i<=nobs;i++)
{
printf("%f , %f\n",maxObs[i],minObs[i]);
} //i
*/
calculOptions(maxObs, minObs,
              nobs, dim, X_i, &callMax, &callMin, &putMax, &putMin,
              r_f, T);
printf("Call on Min %7.4f\n",callMin);
printf("Call on Max %7.4f\n",callMax);
printf("Put on Min %7.4f\n",putMin);
printf("Put on Max %7.4f\n",putMax);
fprintf(Resultats,"Attention les minous\n");
fprintf(Resultats,"Call on Min %7.5f\n",callMin);
fprintf(Resultats,"Call on Max %7.5f\n",callMax);
fprintf(Resultats,"Put on Min %7.5f\n",putMin);
fprintf(Resultats,"Put on Max %7.5f\n",putMax);
//Seulement les chiffres
fprintf(Resultats,"%7.5f\n",callMin);
fprintf(Resultats,"%7.5f\n",callMax);
fprintf(Resultats,"%7.5f\n",putMin);
fprintf(Resultats,"%7.5f\n",putMax);
printf("Attention les minous\n");
getch();
fclose(DonneesActifs );
fclose(Resultats);
fclose(Rendements);
//Liberer les mémoires
free_dmatrix(matCor,1,dim,1,dim);
free_dmatrix(R,1,nobs,1,dim);
free_dmatrix(ST,1,nobs,1,dim);
free_dvector(S_i, 1, dim);
free_dvector(X_i, 1, dim);
free_dvector(Sigma_i, 1, dim);
free_dvector(d_i_z, 1, dim);

```


310

```
free_dvector(maxObs,1,nobs);  
free_dvector(minObs,1,nobs);  
  //  
return 0;  
}  
//-----
```

G.4 Simulation Fonds de Couverture

```

//-----
#include <vcl\condefs.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#pragma hdrstop
#include <conio.h>
#include <math.h>
#include <fcntl.h>
#include <dos.h>
#include <ctype.h>
#include "matrix.h"
#include "utilitairesHF.h"
#include "TrierOrdreCroissant.h"
#define NOMBRE_DONNEES      222
    //On indique ici le nombres de périodes
#define NOMBRE_DONNEES_IND  224
    //On indique le nombre de périodes pour les indices
    //Les dates du début des deux fichiers coïncident
#define NOMBRE_FONDS        199
    //On indique ici le nombre de fonds différents
#define NOMBRE_INDICE       6
    //Le nombre d'indices
#define NOMBRE_ALEA_FONDS   2
    //Choisir aléatoirement chacun de ces fonds
#define NOMBRE_SIMULATIONS  100
    //Le nombre de simulations pour calculer la VÂR
#define NIVEAU_VAR           -0.05
//Le niveau de var pour lequel on calcule la probabilité

//-----
USERES("HF_Simulatopm.res");
USEUNIT("Matrix.cpp");
USEUNIT("UtilitairesHF.cpp");
USEUNIT("TrierOrdreCroissant.cpp");
//-----
int main(int argc, char **argv)

```

```

{
FILE *Data;
FILE *Indice;
FILE *OutputSimul;
int i,
j,
    k,
    m;//compteur pour les simulations
int L_date,
L_type,
L_nom ,
    Longueur_nom;
int typeDansListe;
    //Marqueur pour déterminer si le fonds est déjà
    //contenu dans la liste
int debut,    //début des données valides pour un fonds
fin,        //fin des données valides pour un fonds
    P_debut, //debut des dates pour le portefeuille
    P_fin, //Fin des des dates communes pour le portefeuille
    debut_ind,//début des données pour les indices
    fin_indice; //fin des données pour les indices
int NombrePeriodesValides;
int ProbVaR,//Probabilité que la var des fonds de couverture
//excède celle des fonds indiciels
ProbVaRCombin,//Probabilité que la var du fonds combiné
    //excède celle des fonds indiciels
CompteurVarInd,//Un compteur qui établie le nombre d'observations
    //en deça du niveau de la VaR pour l'indice
CompteurVarFonds,//Un compteur qui établi le nombre d'observations
    //en deça de la var pour les fonds
CompteurVarCombin,
VaR5piresCasInd,
VaR5piresCasFonds,
Var5pireCasCombin,
ProbVaR5pireCasCombin,
ProbVaR5pireCas;

double VarLevel;

```

```

//Le niveau de VaR pour lequel on calcule la propabilité
double *ELO_Ind,
//Expected Loss pour le portefeuille d'indices
    *ELO_Combin,
//Expected loss pour le portefeuille combiné
    *ELO_Fonds;
//Expected Loss pour le portefeuille de fonds de couverture
double ELO_Mean_Ind,
//ELO moyenne sur l'ensemble des scénarios pour indice
    ELO_Mean_Combin,
//ELO moyenne sur l'ensemble des scénarios pour fonds combinés
    ELO_Mean_Fonds;
//ELO moyenne sur l'ensemble des scénarios pour fonds
double ProporthF;
//La proportion du portefeuille investie dans les fonds
//de couverture
char lire[60]; //Array temporaire de lecture
char c;
float ret; //Variable temporaire qui contient le "return"
char **dates;
char **type;
char **nom;
char **listeFonds;//Un vecteur de type de fonds pour vérifier une liste
char typeFondsChoisi[6];//Le type de fonds choisi aléatoirement
float **rendement;
float *PortefeuilleFonds;
//vecteur qui contient les rendements du portefeuille
//de fonds de couverture
char **dates_indice;
char **nom_indice;
float **rendement_indice;
float *PortefeuilleIndices;
float *PortefeuilleCombine;//Le portefeuille combiné indice + HF
float *PortefeuilleCombineTrie;
//Le rendement trié du portefeuille combiné
float *portefeuilleIndiceTrie;
float *portefeuilleFondsTrie;
//Les poids dans chaque indice sont équipondérés #

```

```

float PortWeight[6]={0.16667,0.16667,0.16667,0.16667,0.16667,0.16667};
/*Test pour le total des poids dans le portefeuille
for(i=1;i<=6;i++)
{
    total+=PortWeight[i-1];
}
printf("Total %4.3f\n",total);  */
double Amean, //Moyenne Arithmétique
        Gmean, //Moyenne Géométrique
        StdDev, //Ecart-type
        Skew, //Skewness
        Kurtoz; //Kurtose

//
int num_fonds=1;
int flag=0;
int flagFondsDifferent=0;
int Imprime=0;
//Données sur les fonds de couverture
if((Data = fopen("DonneeTransposeesHF.txt","r"))==NULL)
{
    printf("Incapable lire fichier initialisation\n");
    getch();
    exit(1);
}
//Données sur les indices boursiers
if((Indice = fopen("IndiceUSD_transpose.txt","r"))==NULL)
{
    printf("Incapable lire fichier des indices\n");
    getch();
    exit(1);
}
//Données sur les indices boursiers
if((OutputSimul = fopen("Resultats_HF_SIMUL.txt","w"))==NULL)
{
    printf("Incapable lire fichier des outputs\n");
    getch();
    exit(1);
}

```

```

L_date=10; //Nombre de caractères qui nous donne la date
L_type=5; //Longueur du nom du type de fonds
L_nom=60; //Longueur du nom du fonds de couverture
Longueur_nom=0;
//Pour les fonds de couverture
dates = cmatrix(1,NOMBRE_DONNEES,0,L_date);
type = cmatrix(1,NOMBRE_FONDS,0,L_type);
nom = cmatrix(1,NOMBRE_FONDS,0,L_nom);
listeFonds = cmatrix(1,7,0,L_type);
rendement = fmatrix(1,NOMBRE_FONDS,1,NOMBRE_DONNEES);
PortfeuilleFonds = vector (1,NOMBRE_DONNEES);
PortfeuilleCombine = vector (1,NOMBRE_DONNEES);
portfeuilleFondsTrie= vector (1,NOMBRE_DONNEES);
PortfeuilleCombineTrie=vector (1,NOMBRE_DONNEES);
//Pour les indices
dates_indice = cmatrix(1,NOMBRE_DONNEES_IND,0,L_date);
nom_indice = cmatrix(1,NOMBRE_INDICE,0,L_type);
rendement_indice = fmatrix(1,NOMBRE_INDICE,1,NOMBRE_DONNEES_IND);
PortfeuilleIndices = vector(1,NOMBRE_DONNEES_IND);
portfeuilleIndiceTrie= vector(1,NOMBRE_DONNEES_IND);
ELO_Ind = dvector(1,NOMBRE_SIMULATIONS);
ELO_Fonds = dvector(1,NOMBRE_SIMULATIONS);
ELO_Combin = dvector(1,NOMBRE_SIMULATIONS);
//Initialisation du vecteur des rendements pour le portefeuille de fonds
for(i=1;i<=NOMBRE_DONNEES;i++)
{
    PortfeuilleFonds[i]=0.0;
}
//Initialisation du vecteur de rendements pour le portefeuille d'indices
for(i=1;i<=NOMBRE_DONNEES_IND;i++)
{
    PortfeuilleIndices[i]=0.0;
}
//Dans un premier temps lire les données
fscanf(Data,"%s",lire);
//printf("%s",lire);
//getch();
for(i=1;i<=NOMBRE_DONNEES;i++)

```

316

```
{
    fscanf(Data,"%s",lire);
    for(j=0;j<L_date;j++)
    {
        dates[i][j]=lire[j];
        //printf("%c",dates[i][j]);
    }
//
    //printf("\n ");
}
for(i=1;i<=NOMBRE_FONDS;i++)
{
    //lire le type
    fscanf(Data,"%s",lire);
    for(j=0;j<L_type;j++)
    {
        type[i][j]=lire[j];
        //printf("%c",type[i][j]);
    }
    //printf("\n");
//lire le nom
//fscanf(Data,"%s",lire);
while(!flag)
{
    c=fgetc(Data);
    if(isdigit(c))
    {
        flag=1;
        Longueur_nom=0;
    }//if
    else
    {
        nom[i][Longueur_nom]=c;
        Longueur_nom++;
    }//else
}
flag=0;
for(j=0;j<Longueur_nom;j++)
```

```

    {
        //fscanf(Data,"%c",nom[i][j]);
        nom[i][j]=c;
        printf("%c",nom[i][j]);
    }

for(j=1;j<=NOMBRE_DONNEES;j++)
    {
        // fgets(ret,6,Data);
        fscanf(Data,"%f",&ret);
        //printf("%s\n",ret);
        rendement[i][j]=ret;
        //printf("%7.5f",rendement[i][j]);
    }
    //getch();
}

//Vérifier si la lecture a bien fonctionné
/*
for(i=1;i<=NOMBRE_FONDS;i++)
{
    //Imprimer le type
    for(j=0;j<L_type;j++)
    {
        printf("%c",type[i][j]);
    }
    //printf(" ");
    //Imprimer le nom
    for(j=0;j<L_nom;j++)
    {
        printf("%c",nom[i][j]);
    }
    printf(" ");
    //Les rendements
    for(j=1;j<=NOMBRE_DONNEES;j++)
    {
        //printf("%7.6f",rendement[i][j]);
    }
    //printf("\n");
}

```



```

    }
    */
//-----
//Lire les données pour les indices
fscanf(Indice,"%s",lire);
//printf("%s",lire);
//getch();
for(i=1;i<=NOMBRE_DONNEES_IND;i++)
{
    fscanf(Indice,"%s",lire);
    for(j=0;j<L_date;j++)
    {
        dates_indice[i][j]=lire[j];
        //printf("%c",dates_indice[i][j]);
    }
//
    //printf("\n ");
}
for(i=1;i<=NOMBRE_INDICE;i++)
{
    //lire le nom
    fscanf(Indice,"%s",lire);
    for(j=0;j<L_type;j++)
    {
        nom_indice[i][j]=lire[j];
        //printf("%c",nom_indice[i][j]);
    }
    for(j=1;j<=NOMBRE_DONNEES_IND;j++)
    {
        fscanf(Indice,"%f",&ret);
        //printf("%s \n",ret);
        rendement_indice[i][j]=ret;
        //printf("%7.5f",rendement_indice[i][j]);
    }//j
}

//-----
//Construction du portefeuille d'indices

```

```

//
//Il y a six indice et les poids dans chacune d'elles sont données par
//PortWeight
//

for(i=1;i<=NOMBRE_INDICE;i++)
{
    for(j=1;j<=NOMBRE_DONNEES_IND;j++)
    {
        PortefeuilleIndices[j]+=rendement_indice[i][j]
        *PortWeight[i-1];
        //printf("%f \n",PortefeuilleIndices[j]);
    }//j->NOMBRE_DONNEES_IND
    }//i->NOMBRE_INDICE
//
//-----
//Accéder à un fonds en particulier
printf("Imprimer les donnees pour chaque fonds Y/N ");
c=getche();
printf("\n");
if(c=='y' || c=='Y')
flag=1;
else flag=0;
while(1) {
printf("Entrez le numero d'un fonds 1 a 199 (999) pour arreter....>");
scanf("%d",&num_fonds);
if(num_fonds >199|| num_fonds <=0)break;
printf("\n\nLe numero du fonds est %d \n",num_fonds);
printf("Type de fonds : ");

for(j=0;j<L_type;j++)
    {
        printf("%c",type[num_fonds][j]);
    }
printf("\nLe nom du fonds est : ");
for(j=0;j<L_nom;j++)
    {
        printf("%c",nom[num_fonds][j]);
    }
}

```

```

    }
//-----
//déterminer les données valides
//a) trouver le début:
debut=1;
    fin=NOMBRE_DONNEES;
for(i=1;i<NOMBRE_DONNEES;i++)
{
    if(rendement[num_fonds][i]==0)debut++    ;
        if(rendement[num_fonds][i]!=0)break;
}
for(i=NOMBRE_DONNEES;i>=1;i--)
{
    if(rendement[num_fonds][i]==0)fin--;
        if(rendement[num_fonds][i]!=0)break;
}
printf("Début des donnees %d",debut);
for(k=0;k<L_date;k++)
{
    printf( "%c",dates[debut][k]);
}
    printf("\n");
printf("Fin des donnees %d",fin);
for(k=0;k<L_date;k++)
{
    printf( "%c",dates[fin][k]);
}
    printf("\n");
//-----
//calcul du rendement moyen (Moyenne arithmétique)
Amean=MoyenneArith( debut, fin, rendement, num_fonds);
printf("\n\nMoyenne Artithmetique du rendement : %f pour %d periodes\n",
    Amean,fin-debut+1);
//calcul du rendement moyen (Moyenne géométrique)
Gmean=MoyenneGeom( debut, fin, rendement, num_fonds);
printf("\n\nMoyenne Geometrique du rendement :
    %f pour %d periodes\n\n\n",
Gmean,fin-debut+1);

```

```

if(flag==1) {
printf("\nLes rendements sont :\n");
  for(i=1;i<=NOMBRE_DONNEES;i++)
  {
    for(j=0;j<L_date;j++)
    {
      printf("%c",dates[i][j]);
    }
    printf("  %f \n",rendement[num_fonds][i]);
  }//if
}
} //while
//Si on choisi des fonds de type différents pour la simulation

printf("Différents types de fonds pour les simulations >");
c=getche();
printf("\n");
if(c=='y' || c=='Y')
{
flagFondsDifférents=1;
  printf("Pour chq simulation les fonds seront de différentes
nature\n");
  if(NOMBRE_ALEA_FONDS>7)
  {
    printf("Le nombre de fonds permis ne peut excéder 7\n");
    getch();
    exit(0);
  }

}
else flagFondsDifférents=0;

//*****
//Choisir aléatoirement un certain nombre de fonds

```

```

//NOMBRE_ALEA_FONDS
randomize();
    VarLevel=NIVEAU_VAR;
    ProbVar=0;
    //Variable cumulative pour l'ensemble des simulations
    ProbVarCombin=0;
    ProbVar5pireCas=0;
    ProbVar5pireCasCombin=0;
    dInitializeVecteur(ELO_Ind,NOMBRE_SIMULATIONS);
    dInitializeVecteur(ELO_Fonds,NOMBRE_SIMULATIONS);
    ProportHF=.1;
        //Proportion du portefeuille investie dans le portefeuille
        //de fonds de couverture
//***debut des simulations*****
for(m=1;m<=NOMBRE_SIMULATIONS;m++)
{
P_debut=0;
P_fin=NOMBRE_DONNEES;
fInitializeVecteur(PortefeuilleFonds,NOMBRE_DONNEES);
CompteurVarInd=0;    //Variable cumulative pour chq simulation
CompteurVarFonds=0;    //Variable cumulative pour chq simulation
CompteurVarCombin=0;    //Variable cumulative pour chq simulation
printf("\n\nSimulation %d\n-----\n",m);
for(i=1;i<=NOMBRE_ALEA_FONDS;i++)
    {
        //k est le # du fonds choisi
        k=Choix_fonds(NOMBRE_FONDS);
        strcpy( typeFondsChoisi,&type[k][0]);
        // printf("%s\n", typeFondsChoisi);
        //Vérifier si le type de fonds
        //choisi est dans la liste des fonds
        //déjà choisis.
        if(flagFondsDifferentes==1)
        {
            //Avant d'ajouter un type à la liste
            //il faut s'assurer
            //qu'il n'y est pas déjà
            //s'il y est présent en choisir un autre

```

```

//
typeDansListe=DansListeTypeFonds(listeFonds,
i, typeFondsChoisi);
if(typeDansListe!=0)strcpy(&listeFonds[i][0],
&type[k][0]);
else{//choisir un autre fonds
while(typeDansListe == 0)

{
k=Choix_fonds(NOMBRE_FONDS);
strcpy( typeFondsChoisi,&type[k][0]);
typeDansListe=DansListeTypeFonds(listeFonds, i,
typeFondsChoisi);
//printf(" %d %s\n",typeDansListe,
typeFondsChoisi);

} //while
}
strcpy( typeFondsChoisi,&type[k][0]);
strcpy(&listeFonds[i][0],&type[k][0]);
// printf("%s\n", typeFondsChoisi);
} //if flagFondsDifferentes

printf("%d)%d ",i,k);

printf("%s ",&type[k][0]);
//
for(j=0;j<L_nom;j++)
{
printf("%c",nom[k][j]);
}
debut=1;
fin=NOMBRE_DONNEES;
//Établir les dates communes du début et de la fin
for(j=1;j<=NOMBRE_DONNEES;j++)
{
if(rendement[k][j]==0)debut++;
if(rendement[k][j]!=0)break;
}

```

```

        }//j
    for(j=NOMBRE_DONNEES;j>=1;j--)
    {
        if(rendement[k][j]==0)fin--;
        if(rendement[k][j]!=0)break;
    }//j
    if(P_debut<debut)P_debut=debut;
    if(P_fin>fin)P_fin=fin;

//

//printf(" ");

    printf("\n ");
    for(j=0;j<L_date;j++)
    {
        printf("%c",dates[debut][j]);
    }
    printf(" ");
    for(j=0;j<L_date;j++)
    {
        printf("%c",dates[fin][j]);
    }
    printf(" %d Perodes",fin-debut+1);

printf("\n");
for(j=1;j<=NOMBRE_DONNEES;j++)
{
    PortefeuilleFonds[j]+=rendement[k][j]
    /NOMBRE_ALEA_FONDS;
    // printf("%6.5f\n",PortefeuilleFonds[j]);
} //j

} //i->NOMBRE_ALEA_FONDS

if(flagFondsDifferentes==1)
{

```

```

        for(i=1 ;i<=NOMBRE_ALEA_FONDS;i++)
        {
printf("%d) %s \n",i,&listeFonds[i][0]);
        } //i->NOMBRE_ALEA_FONDS
    }//if
    //le rendement pour toutes les dates
printf("\n\n Dates communes\n");
    for(j=0;j<L_date;j++)
    {
        printf("%c",dates[P_debut][j]);
    }
printf(" ");
    for(j=0;j<L_date;j++)
    {
        printf("%c",dates[P_fin][j]);
    }
    NombrePeriodesValides= P_fin-P_debut+1;
printf(" %d donnees",NombrePeriodesValides);
printf("\n");
//Calcul de la VÂR
//Calcul des rendements du portefeuille combiné
for (i=1;i<=NombrePeriodesValides;i++)
{
    PortefeuilleCombine[i]=(1-ProportHF)
        *PortefeuilleIndices[i]+
        ProportHF*PortefeuilleFonds[i];
}
//Classer les rendements du portefeuilleIndice par ordre croissant
InsertionSort( PortefeuilleIndices, portefeuilleIndiceTrie,
    NombrePeriodesValides );
//Classer les rendements du portefeuilleFonds par ordre croissant
InsertionSort( PortefeuilleFonds, portefeuilleFondsTrie,
    NombrePeriodesValides );
//Classer les rendements du portefeuilleCombiné par ordre croissant
InsertionSort( PortefeuilleCombine, PortefeuilleCombineTrie,
    NombrePeriodesValides );
//
//Calcul de la VaR pour ce scénario

```



```

//
//Trouver laquelle des observations pour l'indice
//avec un niveau de VaR est en deça
//de VarLevel
//Calculer le nombre d'observations pour que le
//portefeuille d'indice atteigne sa VaR
//*****
for(i=1;i<=NombrePeriodesValides;i++)
{

if(portefeuilleIndiceTrie[i]<=VarLevel)
{
CompteurVarInd++; //remi à zéro au début
//de chacune des simulations
ELO_Ind[m]+=portefeuilleIndiceTrie[i];
}
else break; //on continue à compter les observations
//jusqu'à le niveau de VaR soit atteint
}
if(CompteurVarInd>0)
//Il se pourrait qu'il n'y ait aucune valeur
ELO_Ind[m]/=((double)CompteurVarInd);
//On établi ainsi la moyenne de la perte

//Calculer le nombre d'observations pour que le
//portefeuille de fonds atteigne sa VaR
//*****

for(i=1;i<=NombrePeriodesValides;i++)
{
if(portefeuilleFondsTrie[i]<=VarLevel)
{
CompteurVarFonds++;
//remi à zéro au début e chacune des simulations
ELO_Fonds[m]+=portefeuilleFondsTrie[i];
}
}

```

```

else break; //on continue à compter les observations
    //jusqu'à le niveau de VaR soit atteint
}
if(CompteurVarFonds>0)
//Il se pourrait qu'il n'y ait aucune valeur
    ELO_Fonds[m]/=((double)CompteurVarFonds);
//On établi ainsi la moyenne de la perte
//if nous donne une var plus grande pour IND
//la cumulative est incrémenté de 1 à chaque fois que les
//fonds ont une var > que les indices

//
//Calculer le nombre d'observations pour
//le portefeuille combiné atteigne sa VaR
//*****

    for(i=1;i<=NombrePeriodesValides;i++)
    {

        if(PortefeuilleCombineTrie[i]<=VarLevel)
        {
            CompteurVarCombin++;
//remi à zéro au début e chacune des simulations
            ELO_Combin[m]+=PortefeuilleCombineTrie[i];
            printf("%6.5f %6.5f %6.5f\n",
                portefeuilleIndiceTrie[i],portefeuilleFondsTrie[i],
                PortefeuilleCombineTrie[i]);
        }
        else break; //on continue à compter les observations
            //jusqu'à le niveau de VaR soit atteint
    }
    if(CompteurVarCombin>0)
//Il se pourrait qu'il n'y ait aucune valeur
        ELO_Combin[m]/=((double)CompteurVarCombin);
//On établi ainsi
//la moyenne de la perte

        if( CompteurVarFonds>=CompteurVarInd)ProbVaR++;

```

```

//Le Fonds a eu plus d'occurrence
//que l'indice de var plus grande que VarLevel
//Donc HF plus de valeur à risque à VarLevel
    if( CompteurVarCombin>=CompteurVarInd)ProbVaRCombin++;
//Le portefeuille combiné a eu plus d'occurrences que l'indice
//d'une var plus grande que VarLevel
    //Prob que VaR au 5e pire cas >
//FondsCouverture et combiné que pour Indices
    if(portefeuilleFondsTrie[5]<=portefeuilleIndiceTrie[5])
        ProbVaR5pireCas++;
    if(PortefeuilleCombineTrie[5]
<=portefeuilleIndiceTrie[5])ProbVaR5pireCasCombin++;
    /*
    printf("\n\n");
    for(i=1;i<=NombrePeriodesValides;i++)
    {
        printf("%6.5f %6.5f %6.5f\n",
            portefeuilleIndiceTrie[i],portefeuilleFondsTrie[i],
            PortefeuilleCombineTrie[i]);
    }
    */
} //m fin des simulations
//****fin des simulations*****
//Calcul de la ELO à la fois pour le
//portfeuille d'indices et pour le fonds de couverture
ELO_Mean_Ind = Moyenne(ELO_Ind, NOMBRE_SIMULATIONS) ;
ELO_Mean_Fonds = Moyenne(ELO_Fonds, NOMBRE_SIMULATIONS) ;
ELO_Mean_Combin = Moyenne(ELO_Combin, NOMBRE_SIMULATIONS) ;

//

if(flag){
for (i=P_debut;i<=P_fin;i++)
{
    //Les dates
    for(j=0;j<L_date;j++)
    {
        printf("%c",dates[i][j]);
    }
}
}

```

```

    }
    printf(" %f  %f",PortefeuilleFonds[i],PortefeuilleIndices[i]);
    printf("\n");
}
} //if

//
//Écrire les résultats de la dernière simulation dans le fichier
fprintf(OutputSimul,"x=");
for(i=P_debut;i<=P_fin;i++)
{
    fprintf(OutputSimul,"%6.5f ",PortefeuilleFonds[i]);
}
fprintf(OutputSimul,"]");
fprintf(OutputSimul,"\ny=");
for(i=P_debut;i<=P_fin;i++)
{
    fprintf(OutputSimul,"%6.5f ",PortefeuilleIndices[i]);
}
fprintf(OutputSimul,"]");
printf("Pour le portefeuille de fonds\n");
//calcul du rendement moyen (Moyenne arithmétique)
Amean=P_MoyenneArith( P_debut, P_fin, PortefeuilleFonds);
printf("Moyenne Artithmétique : %f \n",Amean);
//calcul du rendement moyen (Moyenne géométrique)
Gmean=P_MoyenneGeom( debut, fin, PortefeuilleFonds);
printf("Moyenne Geometrique: %f \n",Gmean);
//Calcul Écart-Type
StdDev=StandardDeviation(debut,fin,PortefeuilleFonds,Amean);
printf("Ecart-type = %8.4f\n",StdDev);
//Calcul de l'asymétrie
Skew=Skewness(debut, fin, PortefeuilleFonds,Amean,StdDev);
printf("Skewness= %8.6f\n",Skew);
//Calcul de la kurtoze
Kurtosz=Kurtosis(debut,fin,PortefeuilleFonds,Amean,StdDev);
printf("Kuroze= %8.6f\n",Kurtosz);
//*****

```

```

printf("Pour le portefeuille d'indices\n");
Amean=P_MoyenneArith( P_debut, P_fin, PortefeuilleIndices);
printf("\n\nMoyenne Artithmetique du rendement : %f pour
%d periodes\n",
    Amean,P_fin-P_debut+1);
Gmean=P_MoyenneGeom( debut, fin, PortefeuilleIndices);
printf("\n\nMoyenne Geometrique du rendement :
%f pour
    %d periodes\n\n\n",
    Gmean,P_fin-P_debut+1);
//
//
//Finalement la probabilité
printf("Avec %d Fonds\n",NOMBRE_ALEA_FONDS);
printf("Probabilite que le Fonds Couverture VaR > Indice
    a -5p.c. %d \n",
    ProbVaR);
printf("Probabilite que le Fonds Combine VaR > Indice
    a -5p.c. %d \n",
    ProbVaRCombin);
printf("Probabilite que le Fonds Couverture VaR > Indice
    a 5e pire cas %d \n",
    ProbVaR5pireCas);
printf("Probabilite que le Fonds Combine VaR > Indice
    a 5e pire cas %d \n",
    ProbVaR5pireCasCombin);
//printf("%d",ProbVaR);
printf("F) %8.4f I) %8.4f C) %8.4f \n\n",
    ELO_Mean_Fonds,ELO_Mean_Ind,ELO_Mean_Combin);
//à la fin du programme.
printf("\nAttention les Minous");
getch();
fclose(Data);
fclose(Indice);
fclose(OutputSimul);
free_cmatrix(dates,1,NOMBRE_DONNEES,0,L_date);
free_cmatrix(type,1,NOMBRE_FONDS,0,L_type);
free_cmatrix(nom ,1,NOMBRE_FONDS,0,L_nom);

```

```
free_cmatrix(listeFonds,1,7,0,L_type);
free_fmatrix(rendement,1,NOMBRE_FONDS,1,NOMBRE_DONNEES);
free_vector (PortefeuilleCombine,1,NOMBRE_DONNEES);
free_vector(PortefeuilleFonds,1,NOMBRE_DONNEES);
free_cmatrix(dates_indice,1,NOMBRE_DONNEES_IND,0,L_date);
free_cmatrix(nom_indice,1,NOMBRE_INDICE,0,L_type);
free_fmatrix(rendement_indice,1,NOMBRE_INDICE,1,NOMBRE_DONNEES_IND);
free_vector(PortefeuilleIndices,1,NOMBRE_DONNEES_IND);
free_vector (portefeuilleFondsTrie,1,NOMBRE_DONNEES);
free_vector(portefeuilleIndiceTrie,1,NOMBRE_DONNEES_IND);
free_vector (PortefeuilleCombineTrie,1,NOMBRE_DONNEES);
free_dvector(ELO_Ind,1,NOMBRE_SIMULATIONS);
free_dvector(ELO_Fonds,1,NOMBRE_SIMULATIONS);
free_dvector(ELO_Combin,1,NOMBRE_SIMULATIONS);
return 0;
}
//-----
```

G.5 Calcul des Rangs et Construction de Copules

```

//-----
#include <vcl\condefs.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <string.h>
#include <conio.h>
#include "matrix.h"
#include "Rank_dimension.h"
#include "CopuleEmpirique.h"
#include "Kendall_Tau.h"
#include "CopuleTheorique.h"
float Copule_3d[11][11][11][11];
float copule_3d[11][11][11][11];
#pragma hdrstop

//-----
USERES("RankMulti.res");
USEUNIT("Rank_dimension.cpp");
USEUNIT("Matrix.cpp");
USEUNIT("CopuleEmpirique.cpp");
USEUNIT("CopuleTheorique.cpp");
USEUNIT("Kendall_Tau.cpp");
//-----
int main(int argc, char **argv)
{
int nobs; //Le nombre d'observations
int d ; //Le nombre de titres
float **rendements;
float *tau_K;
int longueur_tau_K;
float *K_n_t;
float K_e; //Le t- K_n(t) pour la copule empirique
float t;
int Longueur_t=100;
int **rank;
int *rank_1, *rank_2;
//vecteur temporaire pour calculer le taux de kendall

```

```

float  **Copule_E;
int    nbIntervalles;
int    i, j, k;
//
double Theta;

//
FILE *infile; //Input file
FILE *K_hat;//Fichier pour storer les valeurs de K_n_t
//int compteur=1;
//tester(12);

printf("Pierre Bouvier\nCalculer les rang
      à plusieurs dimension\n");
//if((infile = fopen("TestFile.txt","r"))==NULL)
//if((infile = fopen("BigShot.txt","r"))==NULL)
//if((infile = fopen("HauteVol4Marches.txt","r"))==NULL)
if((infile = fopen("VolNormale4Marche.txt","r"))==NULL)
//if((infile = fopen("d:\\PhD\\These
      \\Programmes\\FichiersC
      \\\\GeneratationCopule\\FichierCopule.txt","r"))==NULL)
//if((infile = fopen("donnees100.txt","r"))==NULL)
//if((infile = fopen("rendements_3_marches.txt","r"))==NULL)
{
    printf("Incapable lire le fichier initialisation");
    getch();
    exit(0);
}
fscanf(infile,"%d %d\n",&d,&nobs);
printf("Nombre de titres : %d, nombres périodes %d\n",d,nobs);
//
if((K_hat = fopen("K_Chapeau.txt","w"))==NULL)
{
    printf("Incapable lire le fichier K_chapeau");
    getch();
    exit(0);
}
//Allouer les vecteurs pour contenir les données de marché

```



```

//
//La première période commence à 1 et se termine à nobs
nbIntervalles=10;
rendements = matrix(1,nobs+1,1,d+1);
rank      = imatrix(1,nobs+1,1,d+1);
rank_1    = ivector(1,nobs);
rank_2    = ivector(1,nobs);
Copule_E  = matrix(1,nbIntervalles,1,d);
K_n_t    = vector(1, Longueur_t);

//Lire les données pour chaque période
for(i=1;i<=nobs;i++)
{
  for(j=1;j<=d;j++)
  {
    fscanf(infile,"%f ",&rendements[i][j]);
  }
  fscanf(infile,"\n");
} //i

/*
for(i=1;i<=nobs;i++)
{
  for(j=1;j<=d;j++)
  {
    printf("%f ",rendements[i][j]);
  }
  printf("\n");
} //i
*/
//
//Calcul des rangs pour toutes les observations recueillies
//
Rank_d( rendements, rank, nobs, d);

for(i=1;i<=nobs;i++)

```

```

{
  for(j=1;j<=d;j++)
  {
    printf("%d ",rank[i][j]);
  }
  printf("\n");
} //i
//getch();
//On calcule les copules 2 par 2

copule_E(rank, nobs, d, Copule_E,nbIntervalles);
//Imprimer la copule
//
//imprimeCopuleEmpirique();
//----
//Calculer le tau de kendall pour chaque paire de v.a.
//Nous avons choose(d 2)
//Allouer un vecteur pour contenir les tau de Kendall
//calculer la longueur du vecteur
longueur_tau_K=choose(d,2);
printf("Le nombre de paires de variables %d\n",
  longueur_tau_K);
//getch();
tau_K=vector(1,longueur_tau_K);
k=0;
for (i=1;i<=d;i++)
{
  extrait_rank(rank, rank_1,nobs, i);
  for(j=i+1;j<=d;j++)
  {
    extrait_rank(rank, rank_2, nobs, j);
    k++;
    tau_K[k]=KendallTau(rank_1,rank_2,nobs);
  }
}

//----
printf("Count DOWN.....\n");

```

```

for (i=1;i<=Longueur_t;i++)
{
    t=(float)i/Longueur_t;
    K_n_t[i]=K_Chapeau(rank, nobs, d, t);
    K_e=t-K_n_t[i];
    fprintf(K_hat,"%3.2f %3.2f \n",t,K_e);
    printf("->%d\n",Longueur_t+1-i);
}
//int z=10;
for (i=1;i<=10;i++)
{
    printf("%d %f \n\n",i,Copule_3d[i][i][i][i]);
}

// /*
for(i=1;i<=longueur_tau_K;i++)
    printf(" %d %5.4f \n",i,tau_K[i]);

//----
//Les copules théoriques liées à chaque modèle
    Theta = 2.50;
CopuleT_Clayton(Theta, Longueur_t);
    CopuleT_Gumbel(Theta,Longueur_t);

//----

printf("\nAttention les minous\n");
    getch();;
fclose(infile);
fclose(K_hat);
free_matrix(rendements, 1,nobs+1, 1,d+1);
free_imatrix(rank, 1,nobs+1, 1,d+1);
free_matrix(Copule_E, 1,nbIntervalles, 1,d);
free_vector(K_n_t,1, Longueur_t);
free_vector(tau_K,1,longueur_tau_K);
free_ivector(rank_1,1,nobs);
free_ivector(rank_2,1,nobs);
return 0;
}

```

```
//-----
```

G.6 Programmes utilitaires

G.6.1 Calcul matriciel

```
//-----
#include <vcl\vcl.h>
#pragma hdrstop
#include <math.h>
#include <conio.h>
#include "Matrix.h"
//-----
float **fmatrix(int nrl, int nrh, int ncl, int nch)
/*****
**
**
**
**
**
**
*****/
{
//Source numerical recipes in C
float **m;
int i;
//Allocate pointers to rows (ce sont des adresses)
if ( (
m =(float **)malloc((unsigned)(nrh-nrl+1)*sizeof(float *))==NULL)
{
printf("Matrix allocation failure in matrix\n");
exit(0);
}
m--=nrl;
//Allocate rows and set pointer to them
for(i=nrl;i<=nrh;i++)
{
if ( (
```

```

    m[i]=(float *)malloc((unsigned) (nch-ncl+1)*sizeof(float))==NULL)
    {
        printf("Allocation failure in matrix()");
        exit(0);
    }//if
    m[i]-=ncl;
    }//for
return m;
} //matrix
//-----
double **dmatrix(int nrl, int nrh, int ncl, int nch)
/*****
**
**
**
**
**
**
*****/
{
//Source numerical recipes in C
double **m;
int i;
//Allocate pointers to rows (ce sont des adresses)
if ( (
m =(double **)malloc((unsigned)(nrh-nrl+1)*sizeof(double *))==NULL)
    {
        printf("Matrix allocation failure in matrix\n");
        exit(0);
    }
    m-=nrl;
//Allocate rows and set pointer to them
for(i=nrl;i<=nrh;i++)
{
    if ( (
    m[i]=(double *)malloc((unsigned) (nch-ncl+1)*sizeof(double))==NULL)
        {
            printf("Allocation failure in matrix()");
            exit(0);

```

```

    }//if
    m[i]--ncl;
    }//for
return m;
}//dmatrix
//-----
int **imatrix(int nrl, int nrh, int ncl, int nch)
/*****
**
**
**
**
**
**
*****/
{
//Source numerical recipes in C
int **m;
int i;
//Allocate pointers to rows (ce sont des adresses)
if ( (
m =(int **)malloc((unsigned)(nrh-nrl+1)*sizeof(int *))!=NULL)
    {
    printf("Matrix allocation failure in matrix\n");
    exit(0);
    }
    m--nrl;
//Allocate rows and set pointer to them
for(i=nrl;i<=nrh;i++)
{
    if ( (
    m[i]=(int *)malloc((unsigned) (nch-ncl+1)*sizeof(int))!=NULL)
        {
        printf("Allocation failure in matrix()");
        exit(0);
        }//if
        m[i]--ncl;
        }//for
return m;

```

```

} //matrix
//-----
char **cmatrix(int nrl, int nrh, int ncl, int nch)
/*****
**
**
**
**
**
**
*****/
{
//Source numerical recipes in C
char **m;
int i;
//Allocate pointers to rows (ce sont des adresses)
if ( (
m =(char **)malloc((unsigned)(nrh-nrl+1)*sizeof(char *)) ==NULL)
    {
    printf("Matrix allocation failure in matrix\n");
    exit(0);
    }
    m-=nrl;
//Allocate rows and set pointer to them
for(i=nrl;i<=nrh;i++)
{
    if ( (
m[i]=(char *)malloc((unsigned) (nch-ncl+1)*sizeof(char)) ==NULL)
        {
        printf("Allocation failure in matrix()");
        exit(0);
        } //if
        m[i]-=ncl;
        } //for
return m;
}

//-----

```

```

void free_fmatrix(float **m,int nrl, int nrh, int ncl, int nch)
{
int i ;
for(i=nrh;i>=nrl;i--)free((char*)(m[i]+ncl));
    free((char*) (m+nrl));
}//free_matrix
//-----
void free_imatrix(int **m,int nrl, int nrh, int ncl, int nch)
{
int i ;
for(i=nrh;i>=nrl;i--)free((char*)(m[i]+ncl));
    free((char*) (m+nrl));
}//free_matrix
//-----
void free_dmatrix(double **m,int nrl, int nrh, int ncl, int nch)
{
int i ;
for(i=nrh;i>=nrl;i--)free((char*)(m[i]+ncl));
    free((char*) (m+nrl));
}//free_matrix
//-----
void free_cmatrix(char **m,int nrl, int nrh, int ncl, int nch)
{
int i ;
for(i=nrh;i>=nrl;i--)free((char*)(m[i]+ncl));
    free((char*) (m+nrl));
}//free_matrix
//-----

float *vector(int nl, int nh)
/* Allocate a float vector with subscript range v[nl..nh] */
{
float *v;
//
if ( (
v=(float *)malloc( (unsigned) (nh-nl+1)*sizeof(float) ))==NULL)
{
    printf("Allocation failure in vector()\n");

```


342

```
        exit(0);
    }//if
    return v-nl;
}
//-----
double *dvector(int nl, int nh)
/* Allocate a float vector with subscript range v[nl..nh] */
{
    double *v;
    //
    if ( (
v=(double *)malloc( (unsigned) (nh-nl+1)*sizeof(double) ))==NULL)
    {
        printf("Allocation failure in vector()\n");
        exit(0);
    }//if
    return v-nl;
}
//-----
void free_vector(float *v, int nl, int nh)
/* free a float vector allocated with vector() */
{
    free((char*) (v+nl));
}
//-----
void free_dvector(double *v, int nl, int nh)
/* free a float vector allocated with vector() */
{
    free((char*) (v+nl));
}
//-----
int *ivector(long nl, long nh)
/* allocate an int vector with subscript range v[nl..nh] */
{
    int *v;
    if ( (
v=(int *)malloc((unsigned) (nh-nl+1)*sizeof(int)))==NULL)
    {
```

```

        printf("Allocation failure in vector()\n");
        exit(0);
    }//if
    return v-nl;
}
//-----
void free_ivector(int *v,int nl, int nh)
{
    /* free an int vector allocated by ivector() */
    free((char*)(v+nl));
}
//-----

//-----
void fprint_Matrix(float **A, int nCols, int nRows)
{
    int i,j;
    //printf("\n\n");
    for(i = 1; i<=nRows; i++)
    {
        for(j = 1; j<=nCols; j++)
            printf("%8.4f ",A[j][i]);
        printf("\n");
    }
    printf("\n\n");
}
//-----
void iprint_Matrix(int **A,int nRows, int nCols)
{
    int i,j;
    //printf("\n\n");
    for(i = 1; i<=nRows; i++)
    {
        printf("%d",i);
        for(j = 1; j<=nCols; j++)
            printf("%d ",A[j][i]);
        printf("\n");
    }
}

```

```
        printf("\n\n");
    }
    //-----
    void dprint_Matrix(double **A, int nRows, int nCols)
    {
        int i,j;
        //printf("\n\n");
        for(i = 1; i<=nRows; i++)
        {
            for(j = 1; j<=nCols; j++)
                printf("%f ",A[i][j]);
            printf("\n");
        }
        printf("\n\n");
    }
    //-----
    void print_Vector(float *V, int n)
    {
        int i;
        for(i=0;i<n;i++)
        {
            printf("%f ",V[i]);
            printf("\n");
        }
        printf("\n\n");
    }
    //-----
    void print_dVector(double *V, int n)
    {
        int i;
        for(i=0;i<n;i++)
        {
            printf("%f ",V[i]);
            printf("\n");
        }
        printf("\n\n");
    }
    //-----
```

```

void Transpose(float **A, float **AT, int nCols,int nRows)
{
    int i,j;

        for(j=0; j < nCols; j++)
            {
                for(i=0; i < nRows; i++)
                    {
                        AT[j][i]=A[i][j];
                    }
            }
}

//-----
void dTranspose(double **A, double **AT, int nRows, int nCols)
{
    int i,j;
    for(i=1; i <= nRows; i++)
        {
            for(j=1; j <= nCols; j++)
                {
                    AT[i][j]=A[j][i];
                }
        }
}

//-----
void InitialiseMatrix(float **A, int nRows, int nCols)
{
    int i,j;
    for(i=0;i<nRows;i++)
        for(j=0;j<nCols;j++)
            A[i][j]=0.0;
}

//-----
void dInitialiseMatrix(double **A, int nRows, int nCols)
{
    int i,j;
    for(i=1;i<=nRows;i++)
        for(j=1;j<=nCols;j++)

```

```

        A[i][j]=0.0;
    }
//-----
int MultMatrix(float **A, float **B, float **C,
int rA, int cA, int rB, int cB,
int rC, int cC)
{
/*****
**
**      Multiplication de la matrice C=X B      **
**      La matrice retourne par C              **
**      rZ et cZ indiquent le nombre de rows et columns **
**
**      *****/
int i,j,k;
float sum_jk;
//Il faut qu'il y ait autant de cols ds A que de lignes ds B
if( cA != rB) return 1;
//Il faut qu'il y ait autant de lignes de A que de lignes de C
// et autant de cols de B que de cols de C
if( (rA != rC) || (cB != cC))return 2;
for (i=0;i<rA;i++)
{
    for(j=0;j<rB;j++)
    {
        sum_jk=0.0;
        for(k=0;k<cA;k++)
        {
            sum_jk += A[i][k]*B[k][j];
        }//colA
        C[i][j]=sum_jk;
    }//rowB
} //rowA

    return 0;
}
//----

```

```

int dMultMatrix(double **A, double **B,
double **C, int rA, int cA, int rB, int cB,
int rC, int cC)
{
/*****
**
**      Multiplication de la matrice C=X B      **
**      La matrice retourne par C              **
**      rZ et cZ indiquent le nombre de rows et columns **
**
**      *****/
int i,j,k;
float sum_jk;
//Il faut qu'il y ait autant de cols ds A que de lignes ds B
if( cA != rB)
{
printf("Problème avec les multiplications de matrice
vérifier le nombre de col et lignes\n");
printf("Press a key\n");
getch();
return 1;
}

//Il faut qu'il y ait autant de lignes de A que de lignes de C
// et autant de cols de B que de cols de C
if( (rA != rC) || (cB != cC))
{
printf("Problème avec les multiplications de matrice
vérifier le nombre de col et lignes\n");
printf("Press a key\n");
getch();
return 2;
}
for (i=1;i<=rA;i++)
{
for(j=1;j<=rB;j++)
{
sum_jk=0.0;

```

```

        for(k=1;k<=cA;k++)
        {
            sum_jk += A[i][k]*B[k][j];
        }//colA
        C[i][j]=sum_jk;
    }//rowB
} //rowA

    return 0;
}
//----

int LU(float **A, float **L, float **U, int n)
/*****
**
**
**
**      Méthode de la décomposition LU
**
**
**
*****/
{
    float **C;
    int col,row,i,j,k;
    float sum_lij, sum_uij;
    //
    C=fmatrix(0,n,0,n);
    for(i=0;i<n;i++)
    {
        for(j=0;j<n;j++)
        {
            C[i][j]=A[i][j];
            L[i][i]=1.0;
        }
    } //i
    for(col=0;col<n;col++)

```



```

**                                                                 **
**          Inversion de matrice carrée                            **
**                                                                 **
**          Méthode de Gauss                                       **
**                                                                 **
**                                                                 **
**                                                                 **
*****/
//La matrice est carrée
//La matrice inverse est retournée par B
// B Commence par une matrice identité
//
int i,j,k;
float *V; //vecteur
float *V2; //vecteur
float *VB;
float *VB2;
float **A1;
A1=fmatrix(0,n,0,n);//afin de préserver la matrice initiale
float facteur;
V=vector(0,n);
V2=vector(0,n);
VB=vector(0,n);
VB2=vector(0,n);
A1=fmatrix(0,n,0,n);
InitialiseMatrix(B,n,n);
  for(i=0;i<n;i++)
for(j=0;j<n;j++)
    A1[i][j]=A[i][j];
  for(i=0;i<n;i++)
    B[i][i]=1.0;

//
//Application de la méthode Gauss
for (i=0;i<n;i++) //LIGNES
{
  for (j=0 ;j<n;j++)
  {
    V[j]=A1[i][j];

```

```

        VB[j]=B[i][j];
    }

    for (j=0;j<n;j++) //COLONNES
    {
        V[j]/=A1[i][i];
        VB[j]/=A1[i][i];
    }//for j
    for(j=0;j<n;j++)
    {
        A1[i][j]=V[j];
        B[i][j]=VB[j];
    }
    for (k=i+1;k<n;k++)
    {
        facteur= A1[k][i];
        for(j=0;j<n;j++)
        {
            V2[j]=facteur*V[j];
            VB2[j]=facteur*VB[j];
            A1[k][j]-=V2[j];
            B[k][j]-=VB2[j];
        }//j

    }//k

} //for i
//print_Matrix(A1,n,n);
// Opérations sur les colonnes pour terminer l'inversion
//

for(j=n-1;j>=0;j--)
{
    for(k=0;k<n;k++)
    {
        V[k]=A1[j][k];
        VB[k]=B[j][k];
    }
}

```

```

    }
    for(i=j-1;i>=0;i--)
    {
        facteur=A1[i][j];

        for(k=0;k<n;k++)
        {
            //V[k]=A1[i+1][k]*facteur;
            V2[k]=V[k]*facteur;
            VB2[k]=VB[k]*facteur;

        }//k

        for(k=0;k<n;k++)
        {
            A1[i][k]-=V2[k];
            B[i][k]-=VB2[k];
        }//k
    }//i
} //j
free_vector(V,0,n);
free_vector(V2,0,n);
free_vector(VB,0,n);

}
//-----
void Chol(double **A, double **L, double **LT, int n)
{
    //
    // A est la matrice dont on cherche la transformation de Cholesky
    // L est la matrice lower trianguler
    // LT est la transposée de L
    int i,j,k;
    float sum_ij;
    float sum_ij_2;
    //printf("Factorisation de Cholesky\n");
    //print_Matrix(A,n,n);
    for(j=1;j<=n;j++)

```



```

**                                                                 **
**      Multiplie une matrice par un                               **
**                                                                 **
**      Vecteur Colonne                                           **
**                                                                 **
**      Usage Le vecteur doit être une ligne                       **
**      La matrice le même nombre de lignes que la longueur     **
**      du vecteur                                                **
**                                                                 **
*****/
//
// Ne pas oublier que multiplier une matrice par une autre e.g.
//  $M_{n,k} \times M_{k,m} = M_{n,m}$ 
// donc  $M_{1,m} \times M_{m,d} = M_{1,d}$ 
int i,
    j;
//Vérifier lignes et collonnes pour la multiplication

if(cA != cV)
{
    printf("Le nombre de lignes de la matrice ne
           correspond pas au nombre de col du vecteur\n");
    printf("Press a Key...");
    getch();
    return(0);
}
printf("\#rows %d \#cols %d vecteur %d\n",rA,cA,cV);
for(i=1;i<=cV;i++)
{
    for(j=1;j<=cA;j++)
    {
        C[i][j]=A[i][j]*V[i];
    }
    printf("%d\n",i);
}
return(1);
}
//-----

```

```

void dInitializeVecteur(double *V, int dim)
{
/*****
**                                     **
**                                     **
**                                     **
**  Initialise un vecteur à 0          **
**  *V pointeur sur le vecteur à initialiser **
**  *V est ensuite retourné          **
**  dim est la dimension du vecteur   **
*****/
int i;
for (i=1;i<=dim;i++)
{
    V[i]=0.0;
}
//-----
void fInitializeVecteur(float *V, int dim)
{
/*****
**                                     **
**                                     **
**                                     **
**  Initialise un vecteur à 0          **
**  *V pointeur sur le vecteur à initialiser **
**  *V est ensuite retourné          **
**  dim est la dimension du vecteur   **
*****/
int i;
for (i=1;i<=dim;i++)
{
    V[i]=0.0;
}
}

```

G.6.2 Programme de trie

```

//-----
#include <vcl\vcl.h>
#pragma hdrstop
#include <conio.h>
#include "TrierOrdreCroissant.h"
#include "Matrix.h"
//-----
//source Pratical Algorithm in C++ Flaming p215
void InsertionSort(float *Vector, float *Array, int Nobs )
//Vector est le vecteur à trier
//Array est le Vector un coup trier (valeur retournée)
/*
Starting with the second item, take each item,
    scan to word the top of the array and insert the
    item where it belongs,
    i.e., stopping when you find an item smaller
    or the beginning of the arrau is reached.
*/
{
int i,j;
float valeur;
//Copier le vecteur dans array
//Réinitialiser Array à Chaque simulation

for (i=1;i <=Nobs;i++)
Array[i]=Vector[i];
//
for(i=2; i<=Nobs;i++)
{
    valeur = Array[i];
    j=i;
    while(j >= 2 && valeur < Array[j-1])
    {
        Array[j] = Array[j-1];
        j-=1;
    }//while
    Array[j]=valeur;
}
}

```


358

```
}  
    /*  
    for(i=1;i<=20;i++)  
    printf("%f  %f \n",Vector[i],Array[i]);  
    getch();  
    printf("\n\n");  
    */  
}
```

Bibliographie

- (1) Aas, Kjersti, Claudia Czado, Arnoldo Frigessi, Henrik Bakken (2006). «Pair Copula Construction of Multiple Dependence. », *Norwegian Computing Center, August 2006*.
- (2) Bouchra, Abakarim. «Évaluation d'options sur plusieurs sous-jacents par des modèles de copules. » Master's thesis, HEC 2005.
- (3) Berg, Daniel, Kjersti Aas (2007). «Models for Construction of Multivariate Dependence. », *Norwegian Computing Center, June 2007*.
- (4) Barbe, Philippe, Christian Genest, Kilani Ghoudi, Bruno Rémillard. (1996) «On Kendall's Process. », *Journal of Multivariate Analysis. VOL. 58, No. 2 : 197-229 1996*.
- (5) Boyle, Phelim, P. 1998. «A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables. », *Journal of Financial and Quantitative Analysis. VOL. 23, No. 1, March 1988*.
- (6) Box, G.E.P., G.M. Jenkins, G.C. Reinsel. *Time Series Analysis : Forecasting and Control*, third edition, Prentice Hall, 1994.
- (7) Cappiello, Lorenzo, Robert E. Engle, Sheppard Kevin. «Asymmetric Dynamics in the Correlations of Global Equity and Bond Returns. », *Journal of Financial Econometrics. VOL. 4, No. 4 pp 537-572, 2006*.
- (8) Cherubini, Umberto, Elisa Luciano, Walter Vecchiato. 2004. *Copula methods in finance*. West Sussex : Wiley.
- (9) Christoffersen, Peter. 2003. *Elements of Financial Risk Management*. London : Academic Press.
- (10) Duan, Jin-Chuan. 1995. «The GARCH Option Pricing Model.», *Mathematical Finance, Vol. 5, No. 1 January 1995*.
- (11) Embrechts, Paul, Alexander McNeil, Daniel Staumann. 1999. «Correlation and dependence in risk management properties and pitfalls.», *Modeling extremal events for insurance and finance.*, University of Lausanne - École des HEC, August 9-13 1999.
- (12) Frees, Edward W., Emiliano A. Valdez. 1997. «Understanding relationships using copulas. », *North American Actuarial Journal, Vol 2, Number 1*.

- (13) Fisher, N.L., Switzer, P. (1985). «Chi-Plots for Assessing Dependence.» *Biometrika*, 72, 253-265.
- (14) Genest, Christian., Boies, Jean-Claude. 2003. «Detecting Dependence With Kendall Plots.», *The American Statistician*, November 2003, Vol 57, No 4.
- (15) Genest, Christian., Gendron, Michel. *Atelier de formation avancée en finance*. Institut de Finance Mathématique de Montréal. (2006).
- (16) Genest, Christian, Anne-Catherine Fabre. 2006. «Everything you always wanted to know about copula but were afraid to ask.» *Département de mathématiques et de statistique Université Laval, Chaire en hydrologie et statistique, INRS. March 21, 2006*
- (17) Genest, Christian, R. Jock MacKay. 1986. «Copules archimédiennes et familles des lois bidimensionnelles dont les marges sont données.» *The Canadian Journal of Statistics. Vol 14. No 2, 1986, pages 145-159.*
- (18) Genest, Christian, Bruno Rémillard. 2006. «Validity of the parametric bootstrap for goodness-of-fit testing for semiparametric models.» *Département de mathématiques et de statistique Université Laval, Service d'enseignement des méthodes quantitatives de gestion, HEC Montréal.*
- (19) Genest, Christian, Jean-François Quessy, Bruno Rémillard. 2005. «Goodness-of-fit Procedures for Copula Models Based on the Probability Integral Transformation.», *Scandinavian Journal of Statistics 2005.*
- (20) Genest, Christian, Louis-Paul Rivest. 1993. «Statistical Inference Procedures for Bivariate Archimedean Copulas.», *Journal of the American Statistical Association. September 1993, Vol 88. No 423.*
- (21) Glasserman, Paul. 2003. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer 2003.
- (22) Haug, Espen Gaarder. 1997. *The Complete Guide To Option Pricing Formulas*. McGraw-Hill.
- (23) Longin, F., Solnik, B. (2001). «Extreme Correlation of International Equity Markets. », *Journal of Finance, Vol LVI, NO 2 April 2001.*
- (24) Margrabe, W. (1978). «The Value of an Option to Exchange one Asset for Another, », *Journal of Finance, Vol 33, NO 1(March), 177-186.*
- (25) Marshall, Albert, Ingram Olkin . 1988. «Families of Multivariate Distributions.», *Journal of the American Statistical Association. September 1988, Vol 83. No 403.*
- (26) Nelsen, Roger B. 1991. *An introduction to copula*, Lecture notes in statistics. New York : Springer-Verlag.

- (27) Rémillard, Bruno. (2006). «Méthodes Numériques en Ingénierie Financière. », *avril 2006*.
- (28) Rémillard, Bruno, Olivier Scaillet (2009). «Testing for equality between two copulas. », *Journal of Multivariate Analysis 100 (2009) 377-386*.
- (29) Savu, Cornelia, Mark Tiede. 2006. «Hierarchical Archimedean Copulas. », *Institute of Econometrics, University of Münster January 2006*.
- (30) Schweizer, B., E. Wolff. 1981. «A Non-Parametric Measures of Dependence for Random Variables.», *Ann. Statist. , Vol 9, 879-885*.
- (31) Schönbucher, Philipp, J. (2003). *Credit derivatives pricing models*. West Sussex : Wiley.
- (32) Stulz,R.M. (1982). «Options on the Minimum or Maximum of Two Risky Assets : Analysis and Applications, », *Journal of Financial Economics, 10*
- (33) van den Goorbergh, Rob, Christian Genest, Bas Werker. 2004. «Bivariate option pricing using dynamic copula models. », *Insurance : Mathematics and Economics 37 (2005) 101-114*.
- (34) Whelan, Niall. 2004. «Sampling from Archimedean copulas. », *Quantitative Finance Volume 4,(2004) 339-352*.