Université Catholique de Louvain

Microéconomie

LECGE 1222 (Pierre Dehez – François Maniquet)

Alexandre Jacquemain

2011-2012

Table des matières

Table des matières

Partie 1 – Dehez

Chapitre 1 : Introduction : Choix et préférences

I. Préférences

1) Problème de décision et préférences

- Problème de décision : X est l'ensemble de nos **alternatives** parmi lesquelles il faut faire un choix.

- Préférences : Le choix du consommateur porte sur un **panier de consommation**, càd une liste complète de bien. On suppose que le consommateur sait classer ces paniers, sait déterminer sa préférence entre deux paniers.

    - $a \succ b$
        - a est préféré à b
        - $\leftrightarrow [a \succsim b]$ et ~~$[b \succsim a]$~~
    - $a \succsim b$
        - b n'est pas préféré à a
    - $a \sim b$
        - indifférence entre a et b
        - $\leftrightarrow [a \succsim b]$ et $[b \succsim a]$

2) Hypothèses sur les préférences

Les 3 hypothèses suivantes doivent être vérifiées

- Complétude
    - pour tout $a,b \in X$, $[a \succsim b]$ ou $[b \succsim a]$
    - il faut donc que la personne sache décider, qu'il y ait préférence OU indifférence. Tous les paniers de biens peuvent donc être comparés
- Transitivité
    - $[a \succsim b]$ et $[b \succsim c] \rightarrow [a \succsim c]$
- Réflexivité : tout panier est au moins aussi désirable que lui-même

Si la relation binaire est réflexive et transitive, on parle de **préordre**

II. Choix et contraintes

B est un **sous-ensemble d'alternatives réalisables** ($B \subset X$)

- Un décideur rationnel choisira la meilleure alternative (a*)
    - $a^* \in B$
    - $a^* \succsim a$ pour tout $a \in B$
    - Cette définition n'exclut pas la possibilité de plusieurs meilleures alternatives (s'il y a indifférence entre celles-ci)

- On constate donc une application qui associe un choix à toute situation
    - $C : B \rightarrow f(B)$
    - telle que $f(B) \subset B$
    - $f(B) = a^*$

- Pour simplifier, on suppose que le choix est unique
    - L'application est donc une fonction
    - $f(B) = a^* \in B$
    - On parle de **fonction de choix**

III. Utilité

A chaque alternative a, on associe un nombre réel u(a) pour **refléter** les préférences

- $u(a) \geq u(b) \leftrightarrow a \succsim b$

- u est une **fonction d'utilité** de X dans R
    - cette fonction est un **concept ordinal**
        - pris isolément, u(a),u(b),… n'ont pas de sens
        - seul le **signe de la différence** u(a) – u(b) fournit une info
            - $u(a) - u(b) > 0 \leftrightarrow a \succ b$
            - $u(a) - u(b) = 0 \leftrightarrow a \sim b$
        - on peut donc déformer cette fonction selon une transformation croissante T (élever au cube par exemple)
            - u = fonction originale
            - v = T(u) = fonction transformée
            - Ces deux fonctions reflètent les mêmes préférences

- Le problème de choix = choisir l'alternative réalisable qui **maximise l'utilité**
    - $u(a^*) \succsim u(a)$ pour tout $a \in B$

    - a* maximise u(a) sur B

- Il s'agit d'un problème d'optimisation où
    - u = fonction objectif
    - B = contraintes

IV. Préférence révélée

1) L'axiome (faible) de la préférence révélée

Si $a = f(B)$ et $b \in B \rightarrow a \succ b$

- Il révèle sa préférence pour a par rapport à b
- S'il est rationnel, il ne choisira pas b dans une autre situation ou a est possible
- Si non, l'axiome est violé

2) Deux approches duales

- On connait les choix → déduit préférences
- On connait les préférences → déduit les choix

Chapitre 2 : Consommation : La demande

I. Paniers de biens (p.40)

- Les alternatives sont des paniers de biens
  - $x = (x_1, x_2, x_3, x_h..., x_n)$
    - x_3 est la quantité du bien « 3 » et celle-ci ne peut donc être négative
  - L'ensemble des alternatives est donc coincée entre les deux axes ($x = \mathbb{R}^n_+$)

- Chaque bien peut être défini par son prix
  - $p = (p_1, p_2, p_3, p_h..., p_n)$
    - p_1 est le prix du bien « 1 ». Il ne peut être négatif

Si on connait le prix unitaire de chaque bien, on peut déterminer la **valeur** du panier de biens

→ **$p.x = p_1x_1 + ... + p_nx_n$**

Les paniers (x) et les prix (p) sont des vecteurs → p.x est un produit scalaire

II. Contraintes et droites budgétaires (p.40-50)

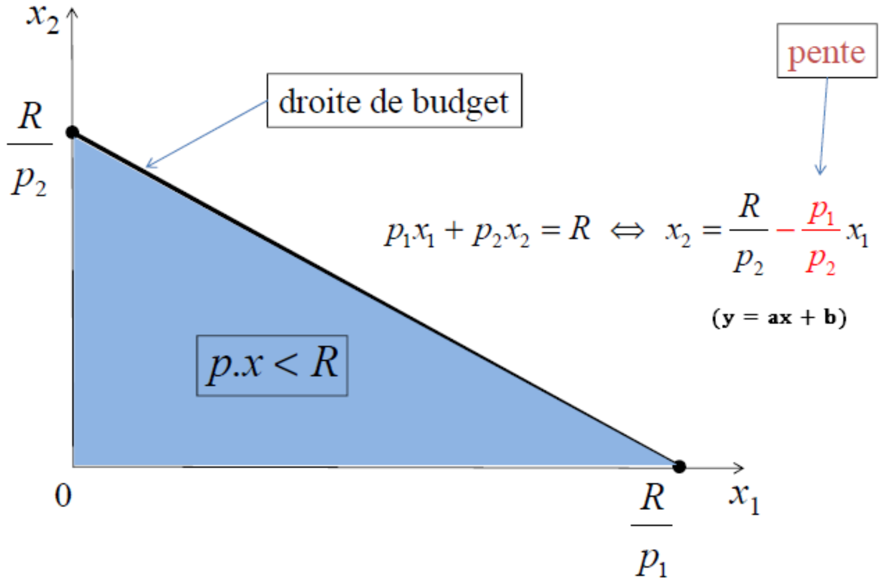
1) Contraintes budgétaires

- R = revenu (ou budget)
  → $p.x \leq R$ (on ne dépense pas plus que le budget)

- On peut définir **l'ensemble des paniers réalisables**
  → $B(p,R) = \{ x \in \mathbb{R}^n_+ \mid p.x \leq R \}$
  → Selon des contraintes (B) de prix (p) et de budget (R), on a une quantité (x) de biens

- L'équation $p.x = R$ est
  - une droite si $n = 2$ (dont la pente est $-\frac{p_1}{p_2}$)
  - un plan si $n = 3$ ...
    → En effet, chaque bien correspond à un vecteur

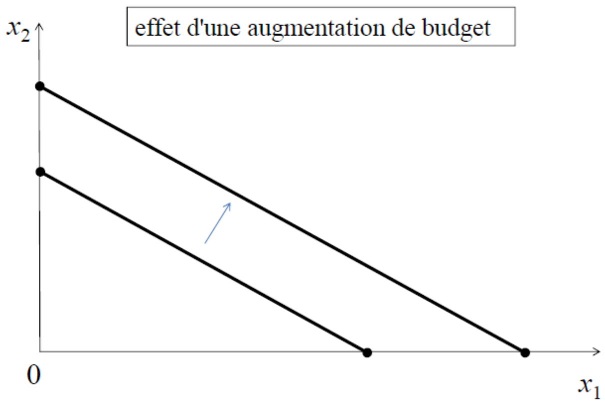
2) Droite budgétaire

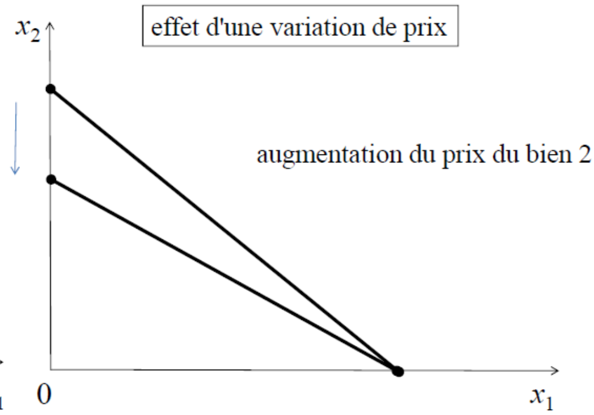


→ La composition des paniers réalisables est limitée par la non-négativité des biens et le budget

→ La droite = les paniers réalisables en utilisant TOUT le budget (maximisation)

3) Quelques transformations graphiques





- <u>Autres cas</u> :
    - Une taxe à la valeur (ad valorem) ou un subside à l'unité influe négativement ou positivement sur le prix d'un bien
    - Une taxe ou un subside forfaitaire va amener une diminution ou augmentation du revenu
    - Le rationnement va empêcher le consommateur de consommer plus d'une certaine quantité d'un bien

III. Courbe d'indifférence et fonction d'utilité

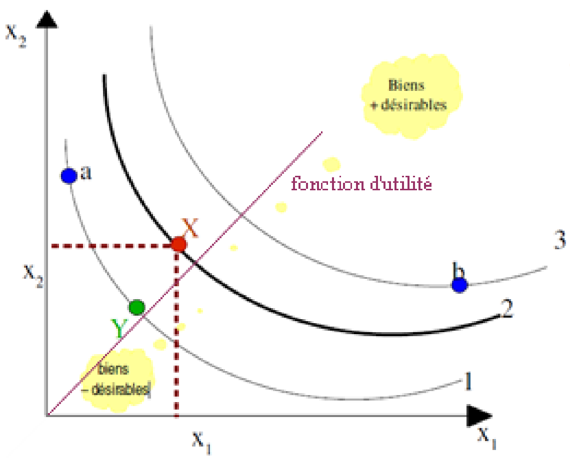
1) Remarque

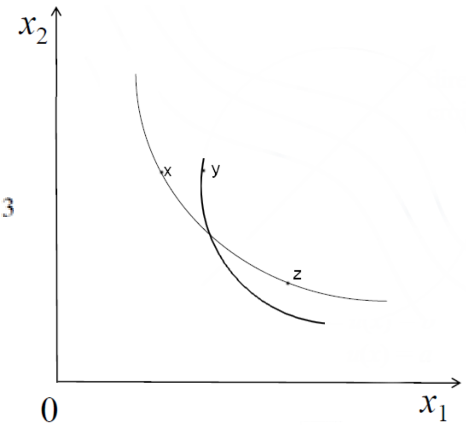
- a > b : a est plus grand que b
  - Exemple : (3,2) > (3,1) → certains scalaires peuvent ne pas être supérieurs
- a >> b : a est strictement plus grand que b
  - Exemple : (3,2) >> (2,1) → tous le scalaires doivent être supérieurs

2) Courbe d'indifférence

A. Définition

Courbe sur laquelle chaque panier de biens est **indifférent** d'un autre
Courbe sur laquelle l'utilité est équivalente (courbe **d'iso-utilité**)



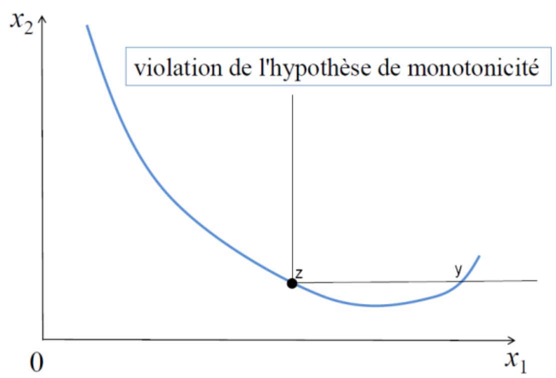


- Grâce aux courbes d'indifférence, on peut dire que (graphe de gauche)
  - X ≻ Y (par rapport à la courbe 1 : X = désirable et Y = indifférent)
  - b ≻ a (par rapport à la courbe 1 : a = indifférent et b = désirable)
- Les courbes d'indifférence NE PEUVENT PAS se croiser (graphe de droite)
  - Ça serait une entorse à la transitivité
  - En effet
    - y ≻ x ~ z (y est ''au-dessus'' de x et z est sur la même courbe que x)
    - MAIS z ≻ y (z est ''au-dessus'' de y)
- Il est évident que, par rapport à un panier de bien de référence Z, la zone Nord-Est sera préférée (+ de chaque bien) tandis que la zone Sud-Ouest sera moins préférée (- de chaque bien). La courbe, elle, est définie par le principe de substitution (ou compensation). Combien faut-il du bien 2 pour compenser une perte du bien 1 ?
- Dès qu'on a deux biens et qu'on fixe un niv d'utilité, on a une CI
- L'ensemble faiblement préféré = biens désirables + CI

B. Hypothèses

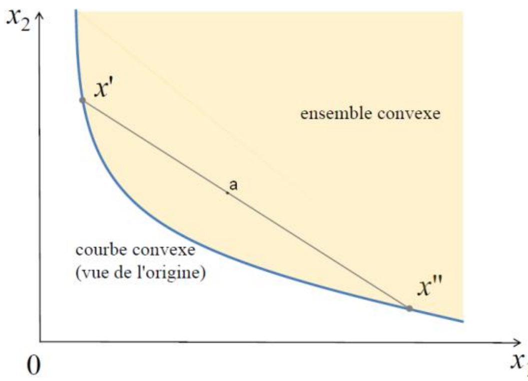
i) Monotonicité

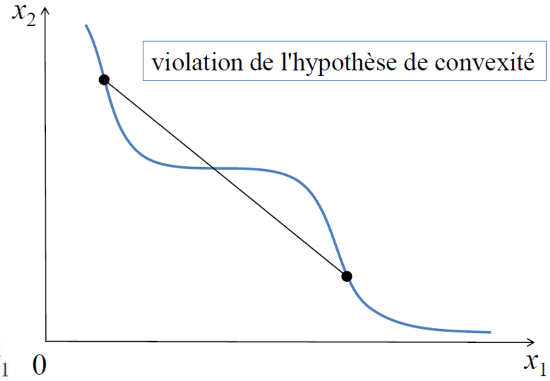
- $y > z \rightarrow y \succ z$
- En français
    - Par rapport à un panier de bien Z de référence → il suffit **qu'un seul** bien ↑ pour que le panier de bien associé soit préféré
    - Un consommateur préfère consommer plus que consommer moins
    - Implication graphique : **pente négative**
    - Sur le graphique ci-dessous
        - y > z (lorsqu'on compare les deux vecteurs : un des 2 scalaires est plus grand tandis que l'autre reste constant)
        - Donc, y devrait être préféré à z et ne devrait donc pas se trouver sur la courbe d'indifférence



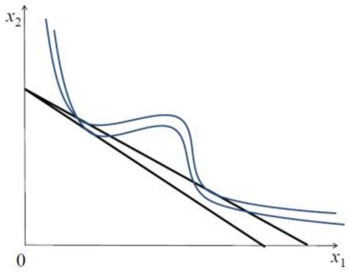
ii) Convexité

- $x' \sim x'' \rightarrow \lambda x' + (1-\lambda)x'' \succ x'$ (pour tout $0 < \lambda < 1$) (règle de convexité)
- En français
    - Un ensemble est convexe si, lorsqu'on trace une droite entre deux points de l'ensemble, tous les points de la droite restent dans l'ensemble
    - Un **consommateur préfère un mixte des deux biens** qu'un des deux biens seuls
        - <u>Métaphore</u> : 2 personnes hésitent entre les 2 mêmes pizzas. La meilleure solution est qu'un achète l'une et l'autre la deuxième pour se les partager
        - Sur le graphique : tous les points de la droite reliant x' et x'' sont au-dessus de la courbe de préférence. Ils sont donc préférés à x' et x'' (eux se trouvant sur la courbe d'indifférence (ici, a est donc préféré à x' et x'')



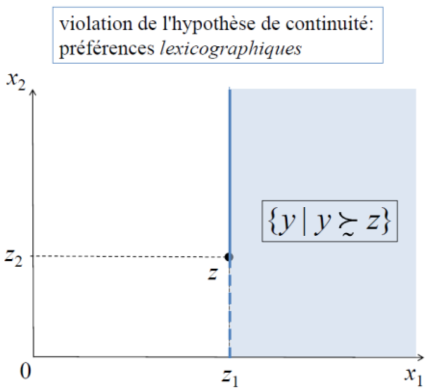


- La convexité assure l'unicité et la continuité de la demande



iii) Continuité

- On peut tracer le graphe sans lever le crayon
- Remarque : les **préférences lexicographiques**
    - Le consommateur veut un certain panier de bien (z). A partir de cela, il y a un ordre de priorité au niveau d'un bien. Ce qui compte, c'est le premier bien
    - Il n'y a PAS de droite, il n'y a qu'un point
    - La zone bleue + la droite est préféré tandis que la zone blanche + les pointillés sont inférieurs
    - Ce ne sont pas des préférences continues



C. Implications des hypothèses

- Si les préférences sont monotones et continues → fonction d'utilité est croissante et continue
    - y > z → u(y) > u(z)
    - cf graphique de gauche dans 2) Définition
    - La fonction d'utilité peut être considérée comme la bissectrice du premier quadrant
- Si les préférences sont convexes → fonction d'utilité quasi-concave
    - u(x') = u(x'') → u(λx' + (1-λ)x'') > u(x')
    - Remarque : une fonction qui est toujours croissante est quasi-concave
- (Si les préférences sont convexes + monotones → on parle de **préférences normales**)

3) Fonction d'utilité

- (cf Chapitre 1 – III)
- La fonction d'utilité joint une utilité à chaque combinaison de biens
- Peut subir une transformation croissante

4) Utilité marginale

- Hypothèse : la fonction d'utilité est différentiable

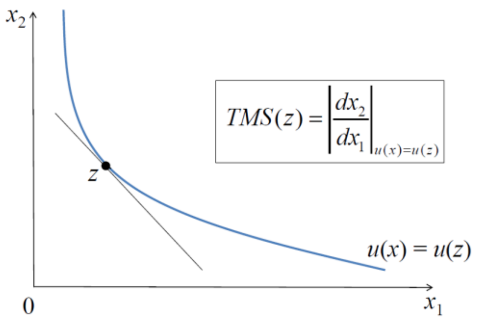
- Définition : utilité marginale du bien h = $\frac{\partial u}{\partial xh}$

    - Les utilités marginales sont des dérivées partielles
    - ... **positives** car la fonction d'utilité est croissante

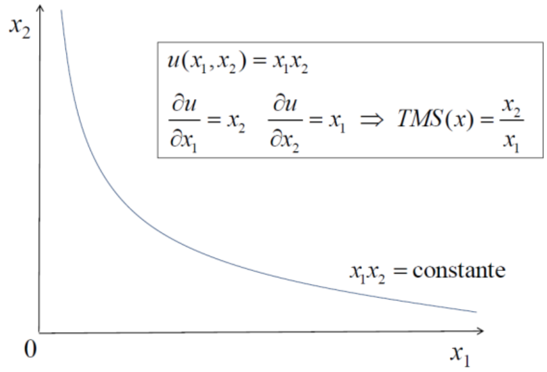
5) Taux marginal de substitution (TMS)

- Définition : le TMS en un point de la courbe = |pente| de la courbe en ce point
- S'il y a deux biens : **TMS** $= \frac{P1}{P2}$
- Le TMS est le rapport des utilités marginales : $\frac{\partial u/\partial x1}{du/\partial x2}$

    - Pour faciliter le calcul du TMS, on peut utiliser une transf croissante
    - Le TMS est indépendant du choix de la fonction d'utilité



- Ex : hyperboles équilatères (l'hyperbole équilatère est aux hyperboles ce que le cercle est aux ellipses)



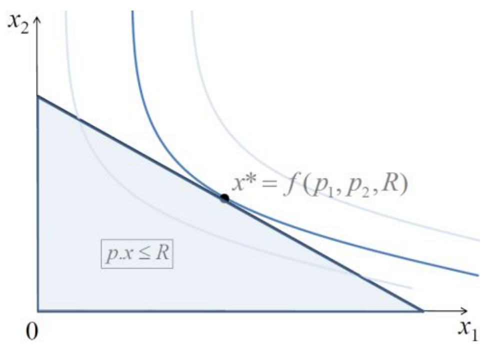
IV. Fonction de demande (individuelle)

1) Définition

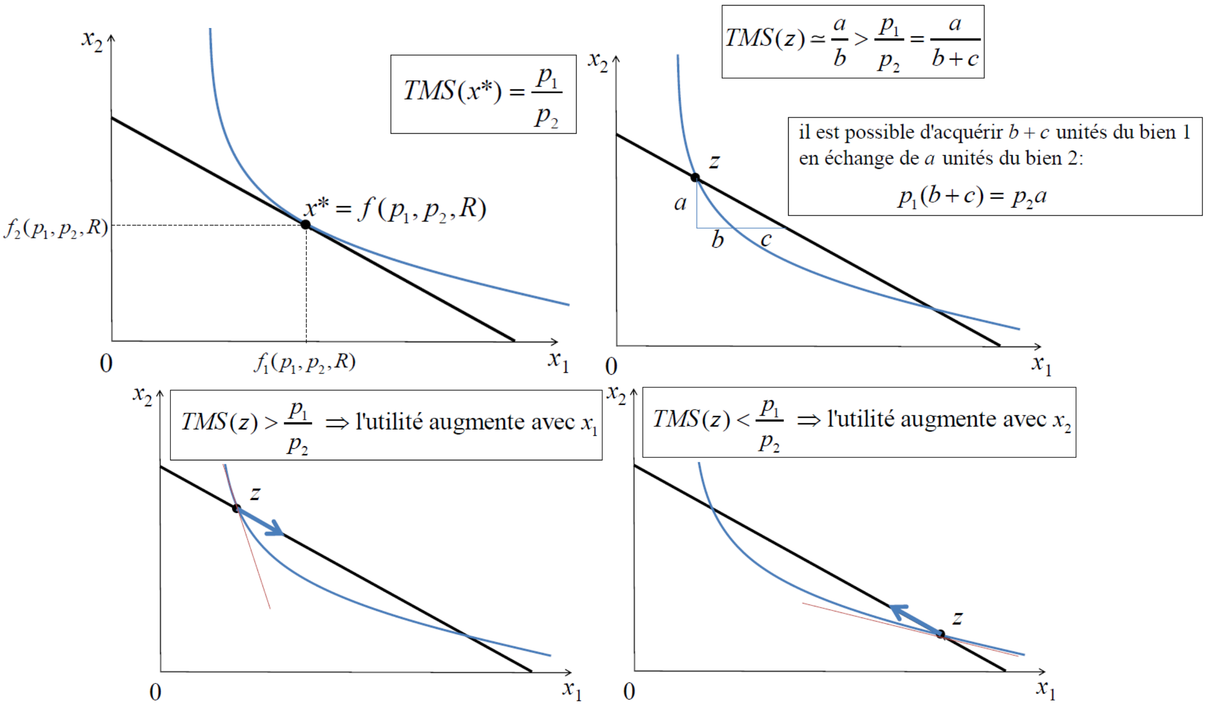
La fonction de demande est la fonction de choix assortie à une contrainte budgétaire

- En clair : la **fonction de demande** détermine un choix en fonction de contraintes que sont les prix des biens et les revenus
- Ex :
    - **x_1 (p_1,p_2, R)** = fonction de demande du bien x_1
    - **x_2 (p_1,p_2, R)** = fonction de demande du bien x_2

  → Le **choix optimal** sera donc : u(x*) ≥ u(x) pour tout x ≥ 0 tq p.x ≤ R



- La solution est caractérisée par une égalité des pentes → TMS (x*) = $\frac{p_1}{p_2}$



2) Identité budgétaire et homogénéité

- <u>Identité budgétaire</u> :
  - Par le principe de monotonicité, la **solution est SUR la droite** budgétaire
  - Les gens dépensent tout le budget fixé
  - $p.f(p_1,\ldots,p_n, R) = R$

- <u>Homogénéité</u> :
  - La fonction de demande étant homogène (de degré zéro) dans les prix et le revenu, l'unité de compte ne va pas l'influencer
  - La quantité demandée est donc indépendante de l'unité monétaire → absence d'illusion monétaire

3) Hypothèse implicite

- On travaille sous l'hypothèse que la solution est intérieure (donc pas sur les axes)
  - Ce sera effectivement le cas si les courbes d'indifférence ne coupent pas les axes
  - Les biens parfaitement substituables [cf V.2)]
    - ne vérifient PAS cette hypothèse → la solution peut être sur un axe
    - Il n'est pas non plus garanti qu'il n'y ait qu'une solution (les préférences sont faiblement convexes)
  - Pour les solutions non-intérieures (en coin) : il n'y a pas l'égalité entre le TMS et le rapport des prix

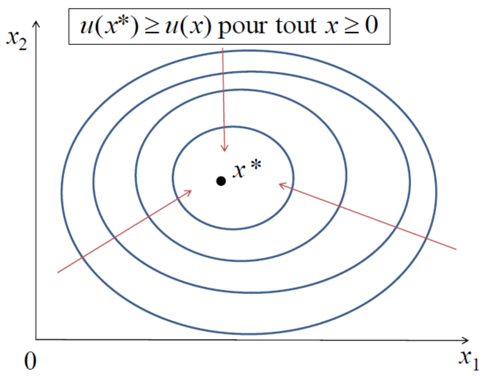
4) Comment obtenir le choix optimal

- Donnée : la fonction d'utilité $u(x_1,x_2)$[1]
- Etape 1 : On calcule le TMS grâce à la formule avec les dérivées partielles
  - Càd : TMS = $\frac{\partial u / \partial x1}{\partial u / \partial x2}$
- Etape 2 : On fait correspondre le résultat obtenu avec la formule selon laquelle le TMS est le rapport des prix (produit croisé).
  - Càd : Le résultat obtenu = $TMS = \frac{P1}{P2}$
- Etape 3 : On exprime p_1x_1 en fonction de p_2x_2 et l'inverse
- Etape 4 : On sait que $p_1x_1 + p_2x_2 = R$

V. Satiété et biens particuliers

1) Satiété

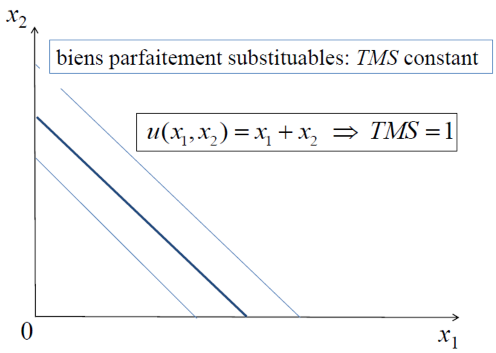
- Le principe de satiété correspond au principe de **panier de biens idéal**
- C'est un max absolu de la fonction d'utilité sans contraintes autre que la non-négativité
- Le principe de satiété viole l'hypothèse de monotonicité
- Les courbes d'indifférences sont des courbes fermées (cô des courbes de niv)



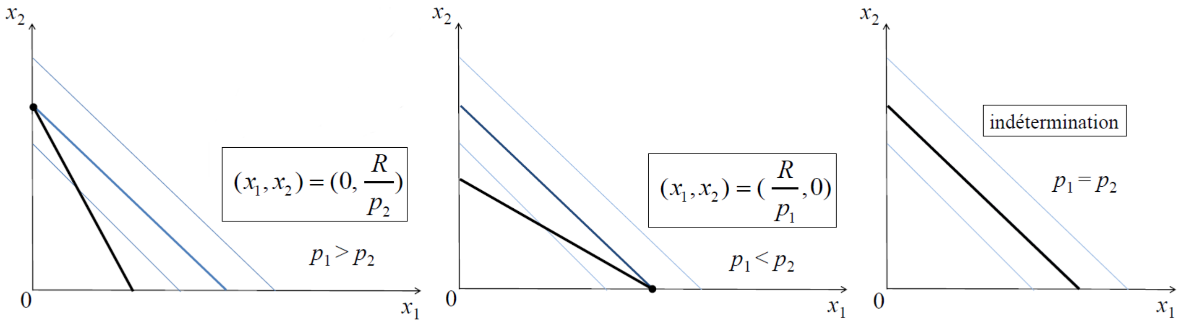
2) Biens parfaitement substituables

- Du point de vue d'un consommateur
- La courbe d'indifférence est une droite dont la pente est -1
  - (Attention, des biens pourraient être parfaitement substituables mais il faudrait deux biens 1 pour un bien 2. Dans ce cas, la pente ne serait pas -1)
- Violation de l'hypothèse de convexité

[1] Définition et propriétés de la fonction d'utilité au chap 1



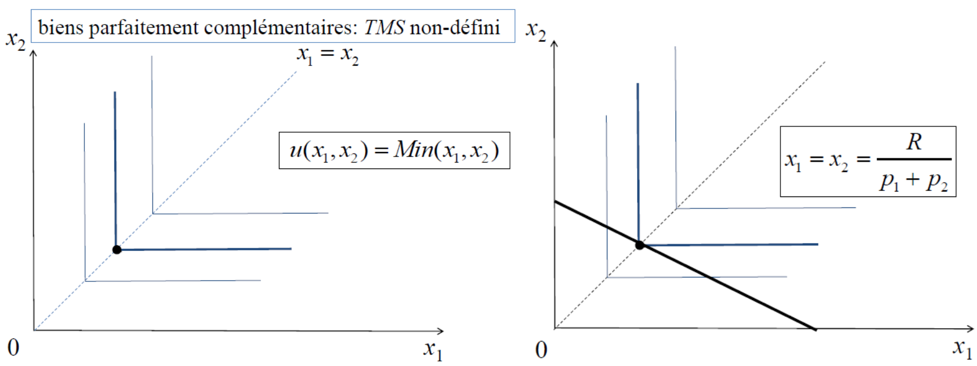
- Les biens parfaitement substituables
    - ne vérifient PAS l'hypothèse implicite → la solution peut être sur un axe
    - Il n'est pas non plus garanti qu'il n'y ait qu'une solution (les préférences sont faiblement convexes)



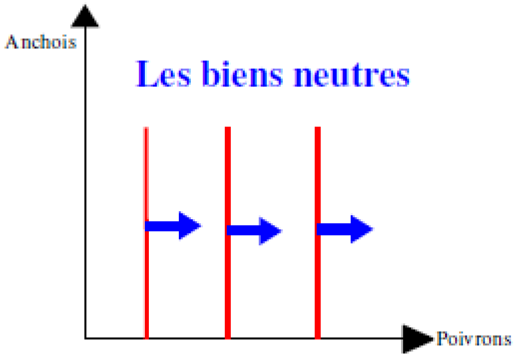
- En effet :
    - Si P du bien 1 > P du bien 2, on prendra tout en bien 2 car prendre l'un ou l'autre ne nous dérange pas et on regarde donc le prix des deux biens
    - Si P du bien 1 < P du bien 2, on prendra tout en bien 1
    - Si les deux prix sont égaux, on prendra une combinaison quelconque des deux biens

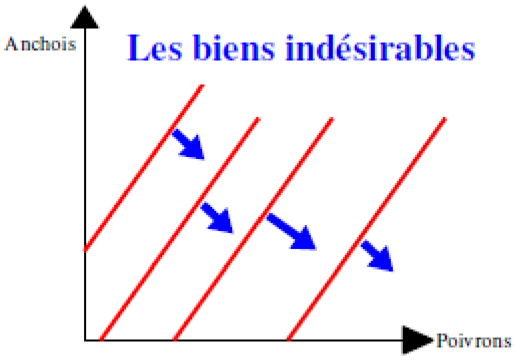
3) Biens parfaitement complémentaires

- Violation des hypothèses de convexité ET monotonicité
- Il n'y a **PAS de TMS**



4) Biens indésirables et biens neutres



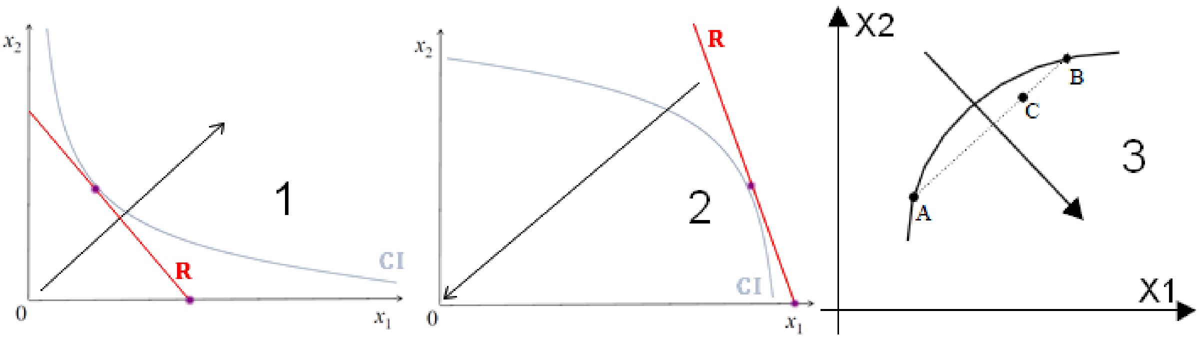


- Les biens neutres :
  - Un bien 1 est neutre si, pour une quantité du bien 2, le consommateur ne se préoccupe pas de la quantité du bien 1
  - Ici, le consommateur se fout des anchois. Pour une quantité de poivrons, on peut lui donner n'importe qu'elle quantité d'anchois, peu importe.
  - Dans le cas inverse (poivrons neutres), les droites seraient horizontales.
- Les biens indésirables :
  - Un bien indésirable est un bien que le consommateur n'aime pas
  - Ici, le consommateur n'aime pas les anchois. Si on lui donne des anchois supplémentaire, il faut également lui donner une certaine quantité de poivrons pour rétablir l'équilibre
  - La zone désirée sera donc celle « en bas, à droite »

VI. Différence entre Convexité et concavité de la courbe d'indifférence et des préférences

Ce n'est pas parce que les préférences sont convexes/concaves que la courbe d'indifférence est convexe/concave… Ça n'a aucun rapport.

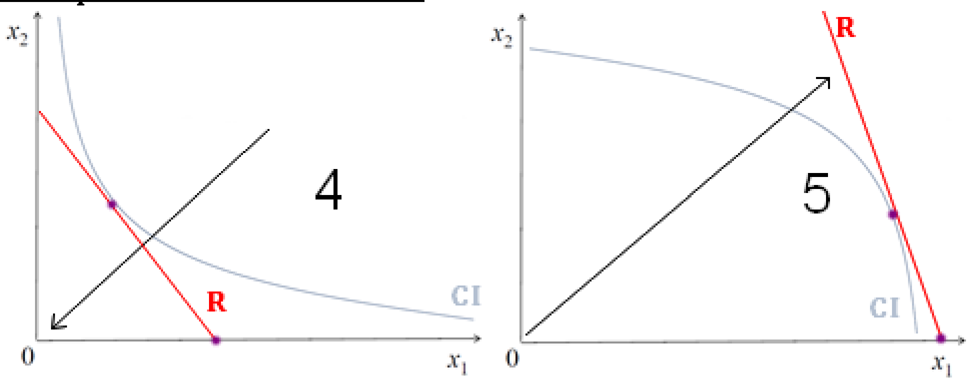
<u>Dans le cas des préférences convexes</u> :



- <u>1 : courbe d'indifférence convexe et biens désirables au-dessus de la CI</u>
  - On aime les deux biens et on préfère avoir un mixte des deux
  - Le choix optimal sera l'intersection entre la droite de budget et la CI

- <u>2</u> : <u>courbe d'indifférence concave et biens désirables en-dessous de la CI</u>
    - On n'aime aucun des deux biens et on préfère avoir un mixte des deux
    - Le choix optimal sera l'intersection entre la droite de budget et la CI
- <u>3</u> : <u>courbe d'indifférence croissante et biens désirables en-dessous de la CI</u>
    - On aime un des deux biens (ici x_1) et vu qu'il n'est pas possible de choisir une solution en coin, on doit bien faire avec x_2 et donc on préfère un mixte des deux (on a moins de x_1 mais aussi de x_2)

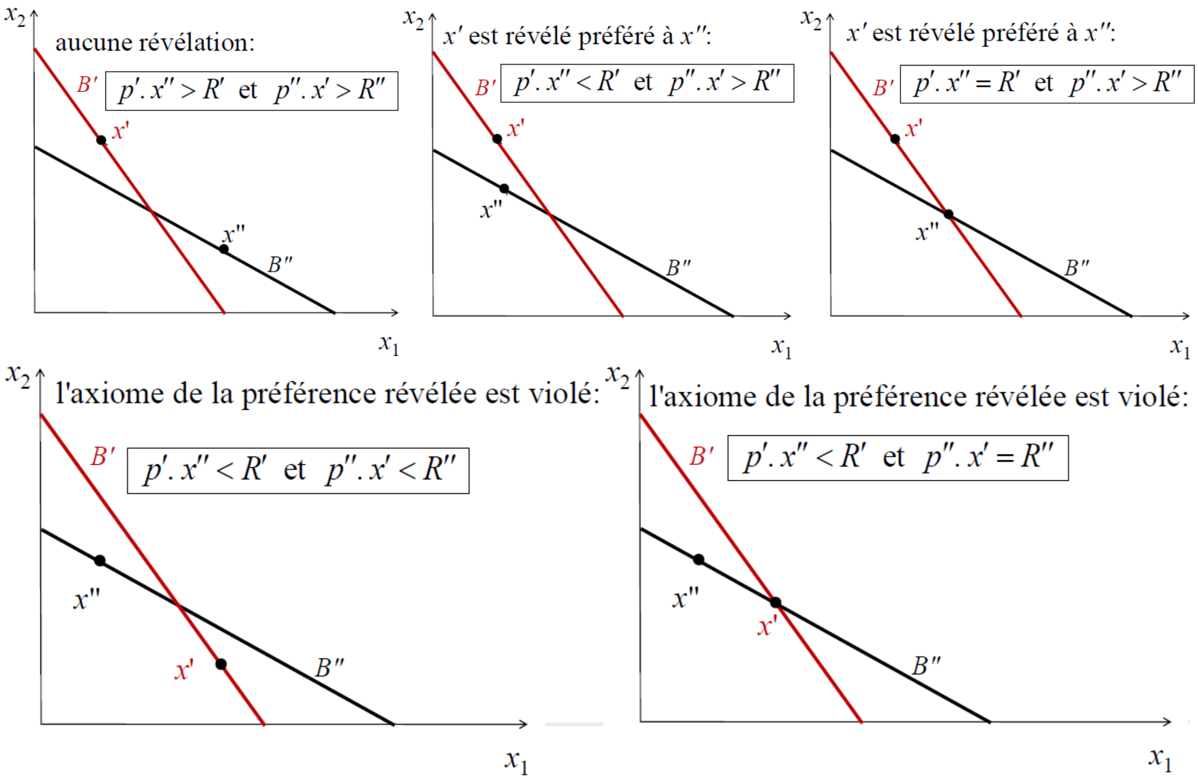
<u>**Dans le cas de préférences non convexes**</u> :



- <u>4</u> : <u>courbe d'indifférence convexe et biens désirables en-dessous de la CI</u>
    - On n'aime aucun des deux biens et on ne préfère pas avoir un mixte des deux
    - Le choix optimal sera en coin (sur un axe)
- <u>5</u> : <u>courbe d'indifférence concave et biens désirables au-dessus de la CI</u>
    - On aime les deux biens et on ne préfère pas avoir un mixte des deux
    - Le choix optimal sera en coin (sur un axe)
- Evidemment, les graphiques 2 et 4 ne sont pas réalistes dans le cas d'achat de biens. En effet, si on n'aime aucun des deux biens, on ne les achètera pas (on n'est pas obligé de dépenser le budget)… Ce sont des graphes qui montrent plutôt des préférences comme le temps passé à étudier telle ou telle matière par exemple.
- Idem pour le graphique 3. On pense plutôt à une activité positive qui serait contrainte par une autre activité, elle, négative. On peut jouer à la console mais seulement si on étudie x heures.
- Le cas de base est le graphique 1

VII. Préférence révélée

- Si on observe les demandes dans 2 situations budgétaires B' et B''
  - x' = C(p',R') et x'' = C(p'',R'')
    - C = choix
- Par l'axiome (faible) de la préférence révélée :
  - **p' . x'' ≤ R' → p'' . x' > R''**
- Plus clairement :
  - x' correspond au choix sous la contrainte (p',R'). Donc p'. x' = R'
  - Dans le même contexte (sous les mêmes contraintes), on choisit x'' tel que p' . x'' ≤ R'
  - On prend moins de x'' qu'on ne prendrait de x'. x' est donc préféré à x''
  - Donc, dans le contexte (p'',R'') : p''. x' > R'. On préfère x' à x'' donc on en veut plus et dans ce contexte, on passe au-delà des contraintes



A chaque fois, il faut voir si x' est sur une droite budgétaire plus haute ou plus basse que B'' et si x'' est sur une droite budgétaire plus haute ou plus basse que B'

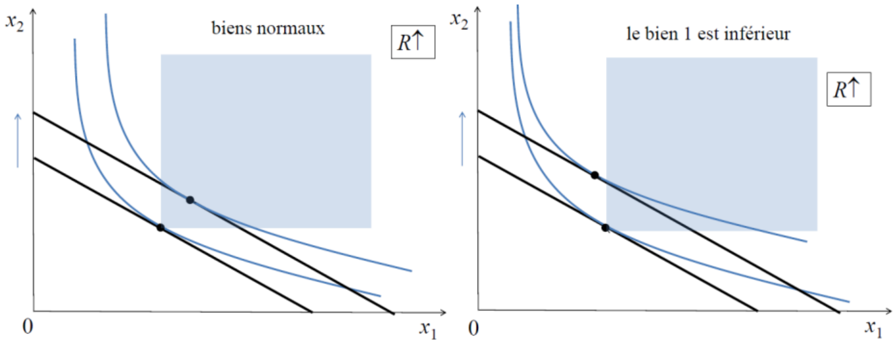
- Toute fonction de demande résultant de la maximisation de l'utilité satisfait à l'axiome de la préférence révélée
  - **p' . f (p'',R'') ≤ R' → p'' . f (p',R') > R''**
- Dans le graphique juste au-dessus à gauche, les préférences sont non-transitives.
  - En effet : p' . f (p'',R'') > R' et p'' . f (p',R') < R''

VIII. Statique comparative[2]

1) Changement du revenu et prix constants

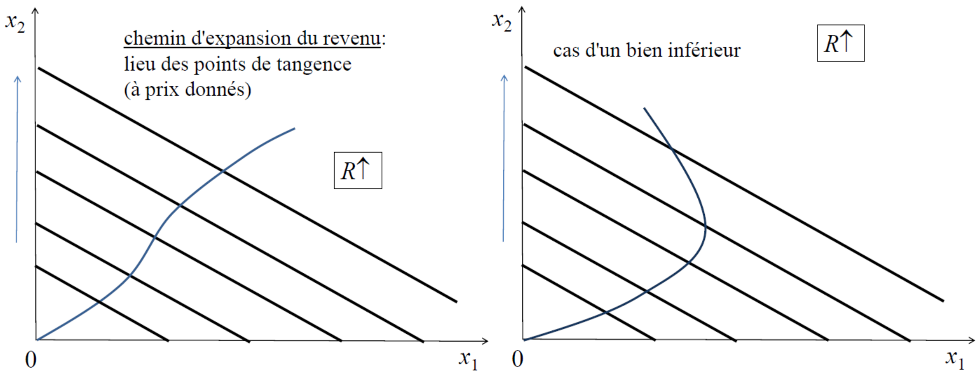
A. Biens inférieurs et biens normaux

- Biens normaux : Si R ↑ → D ↑ (un bien est normal s'il n'est jamais inférieur)
- Biens inférieurs : Si R ↑ → D ↓



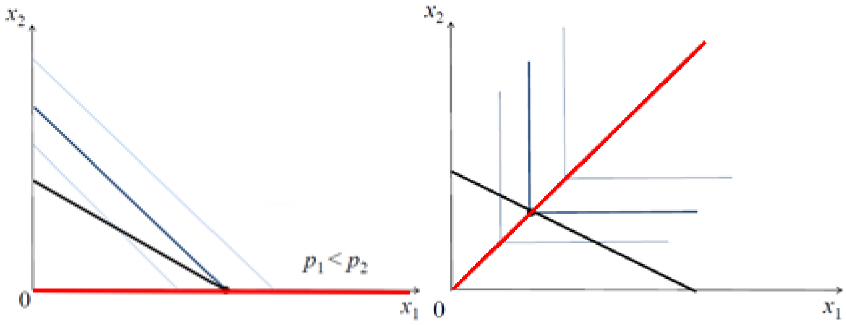
B. Chemin d'expansion du revenu et courbe d'Engel

- Le chemin d'expansion du revenu : représente les **choix optimaux** pour différents niveaux de revenus mais à **prix constant**



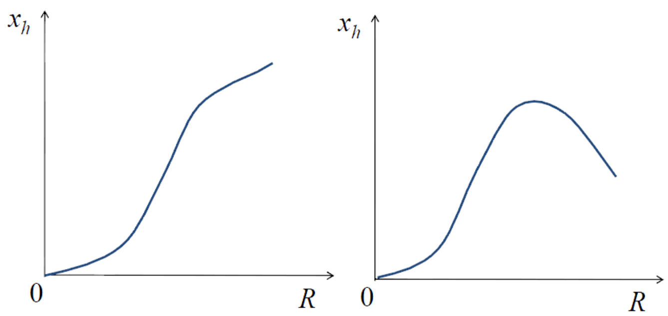
  - Dans le cas normal, le chemin d'expansion du revenu est croissant. En effet, lorsque le revenu augmente, la quantité demandée de chaque bien augmente
  - Lorsqu'un bien est inférieur, on peut définir un point à partir duquel la courbe « change de sens ». En effet, à partir d'un certain revenu, toute nouvelle augmentation du revenu fait diminuer la quantité du bien inférieur et non plus augmenter (ici : c'est x_1 qui est un bien inférieur)

[2] Comparaison entre deux états d'équilibre (par ex : les conséquences d'un changement de prix d'un bien). Avant et après ce sont deux états statiques du marché.



- Pour les substituts parfaits, le chemin d'expansion du revenu est un des axes s'il y a différence de prix entre les deux biens. Si le prix est égal, le chemin d'expansion du revenu est le plan entier formé par les deux axes.
- Pour les compléments parfaits, le chemin d'expansion du revenu est formé par l'ensemble des intersections entre CI et R

- La courbe d'Engel = représente la **demande** (agrégée) par rapport aux revenus à **prix constant**

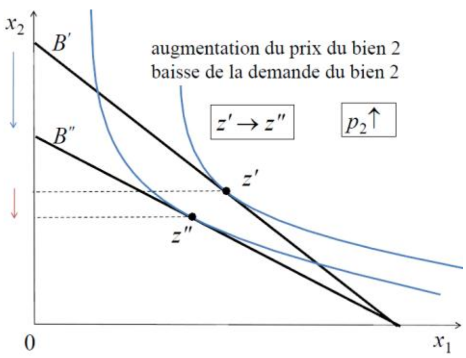


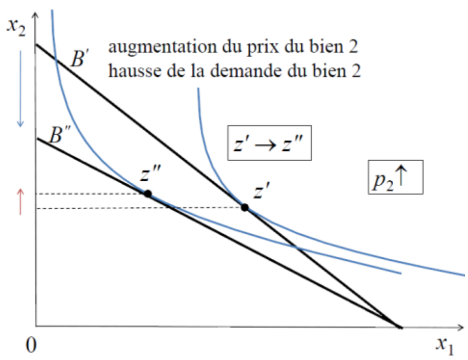
- Dans le cas de biens normaux, la demande augmente lorsque le revenu augmente
- Dans le cas de biens inférieurs, la demande augmente jusqu'à un certain point à partir duquel la courbe « diminue ». En effet, à partir de ce point, lorsque le revenu augmente, la demande diminue

2) Changement des prix et revenus constants

A. Les biens Giffen :

- Si P ↑ → D ↑
  - Ce n'est pas irrationnel : les hypothèses faites sur les préférences n'excluent pas ce paradoxe
  - Un bien Giffen n'est compatible qu'avec un bien inférieur

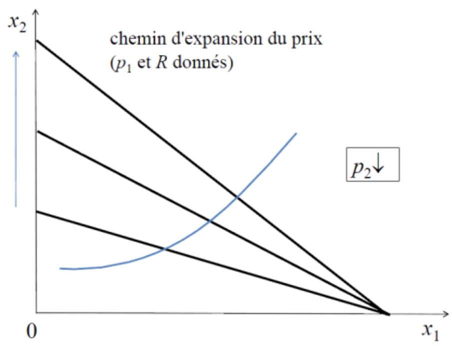




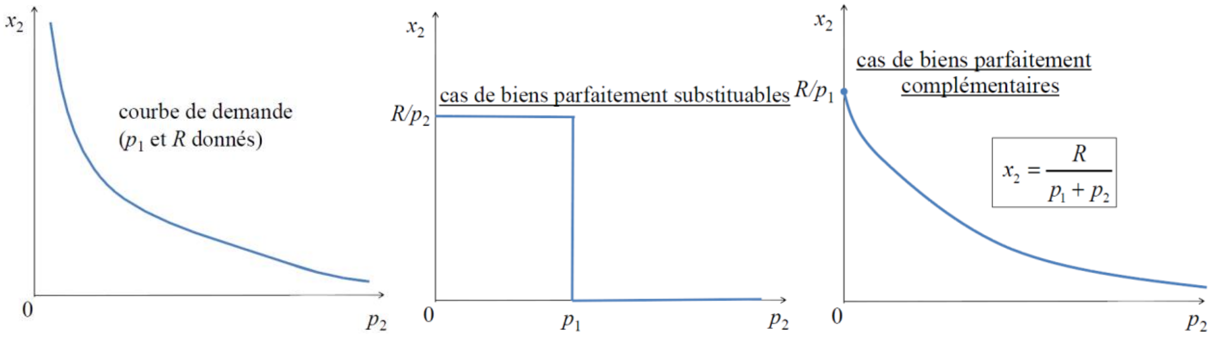
  - <u>Le graphique de gauche correspond à un bien normal</u> : Le point de tangence entre CI et R est plus bas : P ↑ → D ↓
  - <u>Le graphique de droite correspond à un bien Giffen</u> : Le point de tangence entre CI et R est plus haut : P ↑ → D ↑

B. Chemin d'expansion du prix et courbe de demande

- <u>Le chemin d'expansion du prix</u> : lieu des points de tangence à revenus et à prix d'un des deux biens constants → seul le prix d'un des deux biens varie



- La courbe de demande : variation de la demande d'un bien par rapport à son prix



  - Dans le cas normal : la quantité demandée diminue si le prix augmente
  - Dans le cas de biens parfaitement substituables :
    - Quand $P_1 > P_2 \rightarrow$ toute la demande va au bien 2
    - Quand $P_1 < P_2 \rightarrow$ toute la demande va au bien 1
    - Quand $P_1 = P_2 \rightarrow$ indétermination
  - Dans le cas de biens parfaitement complémentaires : La demande diminue si le prix augmente

C. Effet de substitution et effet de revenu

Une hausse du prix du bien 2 à **deux effets** :

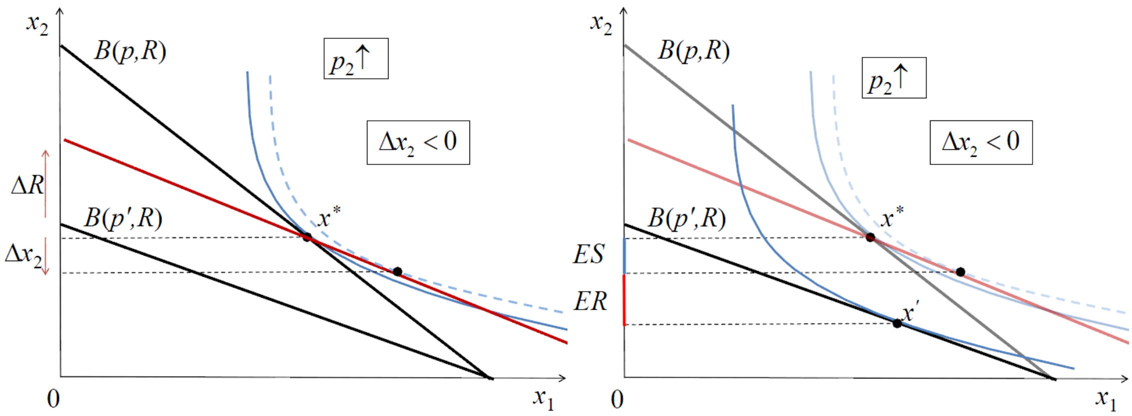
- Effet de revenu (ER) : le pouv d'achat diminue
  - $\frac{R}{P2} \downarrow$
- Effet de substitution (ES) : le bien 1 devient relativement moins cher
  - $\frac{P1}{P2} \downarrow$

- Pour un bien normal : ER et ES sont négatifs → l'**effet total** est **négatif** → D ↓
- Pour un bien inférieur : ER est positif et ES est négatif → l'**effet total** est **indéterminé** (il peut être négatif ou positif) → D ↑ ou ↓

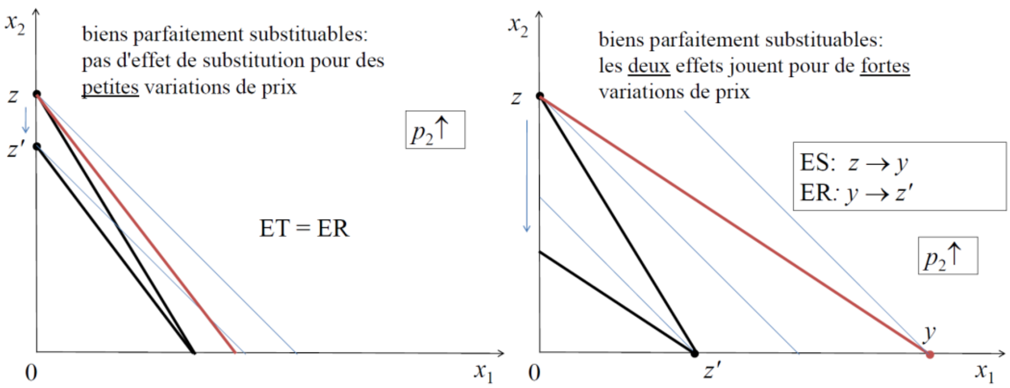
- Comment calculer ces effets (dans le cas du bien 2) ?
  - Etape 1 : **Calcul de ET**
    - On calcule la demande pour le bien 2 avant/après augmentation du prix
    - $x_{2après} - x_{2avant} = ET$
  - Etape 2 : **Calcul de ES**
    - Pour calculer ES, on ne tient pas compte de ER, on l'isole. On calcule l'effet de la hausse de prix en ajustant le revenu afin que le choix optimal ne change pas

- $R' = p_1 . x_1^* + p_2' . x_2^*$ (Par rapport au revenu de base, seul px_2 change)
- A partir de ce revenu, on calcule la nouvelle quantité de x_2
- On fait la différence entre cette quantité et celle de base

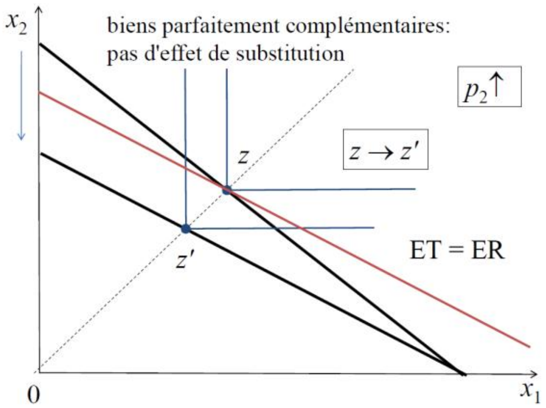
○ Etape 3 : **Calcul de ER** = ET – ES



- Le graphique de gauche illustre l'effet de substitution isolé tandis que celui de droite conjugue les deux effets. Le point x' sera le nouveau choix optimal, conséquence de l'effet total



- Pour qu'il y ait effet de substitution, il faut que le prix du bien 2 augmente assez pour qu'il devienne plus cher que le bien 1.



IX. Demande agrégée, demande inverse, échange

1) La demande agrégée

- La demande (agrégée) pour un bien h est la somme des demandes individuelles
  - Chaque consommateur est caractérisé par ses préférences et son revenu
  - Demande agrégée $q_h = D_h (p)$
    - La quantité est exprimée en fonction de tous les prix
    - Qui possède des propriétés que n'ont pas nécessairement les demandes individuelles → continuité et « loi de la demande »

- La loi de la demande stipule que la demande (agrégée) d'un bien est une fonction décroissante du prix de ce bien

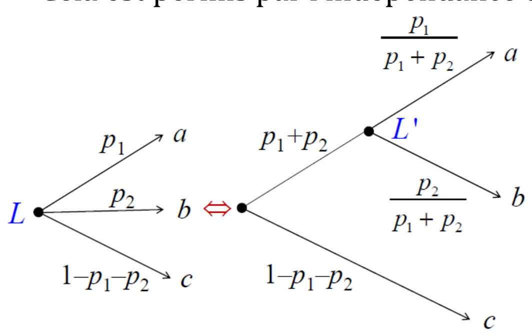
2) La demande inverse

- $P_h = \frac{1}{Dh}(q_h)$ → Le prix est exprimée en fonction des quantités

Chapitre 3 : Incertitude[3] et temps

I. Quelques notions et rappels

- Des consommations contingentes (ou conditionnelles) dépendent d'un évènement (ou état) qui se déroulera selon une certaine probabilité
- L'utilité espérée : $pu(x_1) + (1-p)u(x_2)$
    - Deux évènements sont possibles. Une probabilité et un bien sont liés à chaque évènement et seront caractérisés par une certaine utilité
- Une loterie (L) est définie par :
    - Un ensemble de résultats possibles A = {x1,…,xn}
    - Une distribution de proba (p1,…,pn) sur A
    - Une loterie simple a deux résultats possibles : L = (p|a,b)
        - Produit a avec une probabilité p et b avec une probabilité 1-p
        - Son espérance mathématique = pa + (1-p)b
        - On peut ramener toute loterie à une combinaison de loteries simples
            - En effet, les alternatives peuvent elles-mêmes être des loteries
            - Cela est permis par l'indépendance des évènements



- Une loterie X est donc une variable aléatoire
    - Qui peut être discrète, continue ou mixte
    - Caractérisée par sa fonction de distribution : $F(x) = P(X \leq x)$
    - Qui a éventuellement une espérance mathématique
        - $E(x) = \sum_{x \in R} x\, P(X = x)$ ou $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x) dx$
        - Où f(x) = fonction de densité = F'(x)
    - En partant d'une variable aléatoire X et d'une fonction T, on peut construire la variable aléatoire Y = T(x) qui est la transformée de X
    - Une variable aléatoire peut avoir des moments d'ordre k
        - L'espérance mathématique est le moment d'ordre 1
        - La variance est le moment d'ordre 2 de la v.a. $Y = X - \mu_x$

[3] On devrait plutôt parler de risque

- $\sigma^2(x) = E((X-\mu_x)^2)$

II. Utilité espérée et positions face au risque

1) Von Neumann et Morgenstern : l'utilité espérée (UE)

- **u (p|a,b) = pu(a) + (1-p)u(b)**
  - utilité attachée = utilité espérée des composantes
  - pour toute loterie simple (p|a,b)

- Contrairement à précédemment, l'utilité est un concept cardinal
  - On peut comparer les différences d'utilité
  - On est sorti du cadre ordinal qui valait pour les préférences sans risque
  - On ne peut donc plus effectuer n'importe quelle transformation croissante…. On peut faire des **transformations affines croissantes** (linéaires) → $v(x) = \alpha + \beta u(x)$ $\beta>0$

- **$X \succsim Y \leftrightarrow E[u(x)] \geq E[u(Y)]$**
- En d'autres termes : une loterie X est préférée à une loterie Y ssi son espérance est égale ou supérieure à celle de Y

- La fonction d'utilité traduit l'attitude du décideur face au risque

2) Positions face au risque

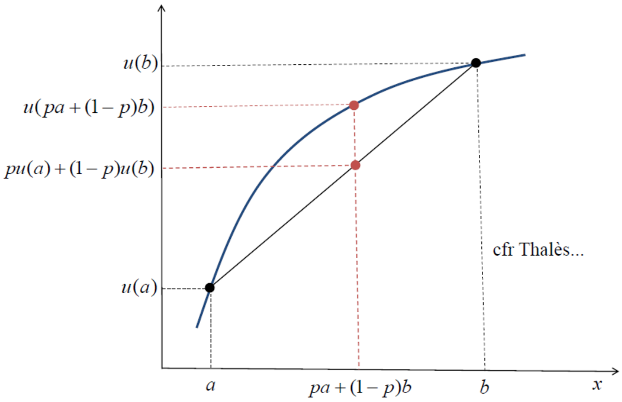
A. *Aversion au risque*

- Il y a aversion au risque si, pour deux choix ayant la même espérance mathématique, on prend le choix où le bien certain est le plus grand.

- Paradoxe de Saint-Pétersbourg :
  - La v.a. prends les valeurs, 2,4,8,… avec des probas $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$, …
  - On voit bien que cette v.a. n'a pas d'espérance mathématique, elle est infinie
  - Cela voudrait donc dire que le décideur serait prêt à payer des sommes énormes pour participer à cette loterie
  - Pour Daniel Bernouilli : la variation d'utilité attachée à une variation de richesse et inversement proportionnelle à la richesse initiale
    - $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \rightarrow u(x) = \ln(x)$
    - L'espérance de l'utilité de la loterie est alors finie

- De manière générale : il y a aversion si la personne préfère l'espérance mathématique de la loterie à la loterie elle-même → $E(L) \succ L$
    - Appliqué à une loterie simple L = (p|a,b) et sous la condition UE, on obtient :
        - $u(pa+(1-p)b) > pu(a) + (1-p)u(b)$ (après transformations)

- Concavité stricte de la fonction d'utilité :
    - Celle-ci est conditionnée par l'inégalité ci-dessus
    - Elle représente une utilité marginale décroissante de la richesse (qui va dans le sens de l'idée de Bernouilli : $u''(x) < 0$)
    - + la fonction est concave → + l'aversion au risque ↑

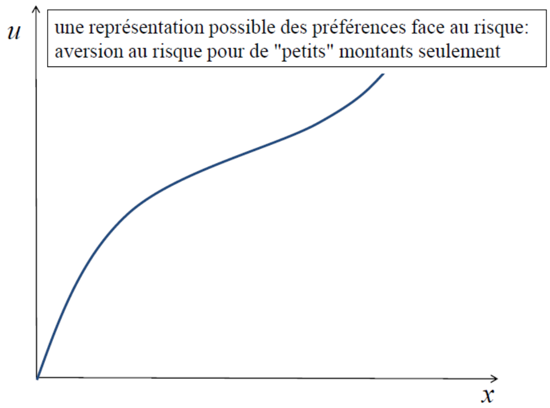


- L'aversion au risque est une caractéristique des préférences et est donc totalement indépendante de l'utilité

B. Neutre et penchant pour le risque

- Un décideur neutre : est indifférent entre une loterie et son espérance mathématique
    - La fonction d'utilité est linéaire
    - $L \succsim L' \leftrightarrow E(L) \geq E(L')$

- Il y a penchant pour le risque (risk lover) si le décideur préfère la loterie à son espérance mathématique
    - la fonction d'utilité est strictement convexe



C. *Mesure du degré d'aversion au risque :*

- $r_u(x) = -\frac{u''(x)}{u'(x)}$
    - En d'autres mots : le rapport de la dérivée seconde sur la dérivée première
    - C'est une mesure de la concavité de la fonction d'utilité en un point
    - C'est donc une mesure locale
    - On se rend compte que : + richesse ↑ → + degré aversion ↓

- Cette mesure est invariante à toute transformation affine de la fonction d'utilité

3) Paradoxe d'Allais

- Montre les limites de l'approche « utilité espérée ».

	L_1	L'_1
0	0	0.01
500	1	0.89
2500	0	0.10

	L_2	L'_2
0	0.89	0.9
500	0.11	0
2500	0	0.1

- Pour la plupart des personnes confrontées à ce choix : $L_1 \succ L'_1$ et $L'_2 \succ L_2$
- Or, lorsqu'on compare les deux choix par la méthode UE, on remarque que : si $L_1 \succ L'_1$ alors $L_2 \succ L'_2$

- Axiome d'indépendance : $L \succsim L' \leftrightarrow (p|L,L'') \succsim (p|L',L'')$
    - Si la loterie L est préférée à la loterie L'
    - Alors pour toute loterie L'', la loterie portant sur L et L'' sera préférée à celle portant sur L' et L'', pour les mêmes probabilités
    - Notre choix n'est pas influencé par la loterie qui revient dans les deux alternatives
    - Cet axiome est souvent violé

4) Méthode de résolution[4]

- Etape 1 : définir les différents états du monde et adjoindre leurs probabilités
  - Les états du monde = actif risqué augmente de valeur >< actif risqué diminue de valeur. Été pluvieux >< été sec,….
- Etape 2 : mise en relation avec EU (utilité espérée)
  - EU = u(p|a,b) = pu(a) + pu(b)
  - La somme des différents états du monde multipliés par leur proba et leur utilité = EU
- Etape 3 : maximisation
  - On veut maximiser l'utilité espérée par rapport à x. Ce dernier n'apparait pas clairement au-dessus mais est un élément de a et b
  - On veut donc que la dérivée de EU(x) = 0
  - EU'(x) = kpu'(a) + lpu'(b)
    - En dérivant, on fait apparaitre une dérivée de u(a) et u(b) mais on fait également apparaitre k et l qui sont les coefficients de x.
    - On doit donc dériver à nouveau mais cette fois-ci, juste u(a) et u(b)
      - Pour cela, on utilise la fonction d'utilité et sa dérivée
      - On obtiendra, au final, un x qui est la quantité d'actif risqué qu'on investira (par exemple)

5) Quelques exemples

A. L'assurance

On s'intéresse à un assuré disposant d'un budget **w** avec une fonction d'utilité **u** concave satisfaisant UE. Il est confronté à un risque de sinistre qui le conduirait à une perte **s** pouvant survenir avec une proba **p.** Il doit choisir un niveau de couverture **x** sachant qu'il devra payer une prime d'assurance proportionnelle à x : **αx**

→ Les paramètres sont donc : w, s, p, α et u
L'assuré veut maximiser son utilité

- On sait que : u (p|a,b) = pu(a) + (1-p)u(b) (Morgenstern et Von Neumann)
- Ici, quels sont a et b ? Quelles sont les deux loteries possibles ?
  - Si le sinistre survient (probabilité p)
    - w – s – αx + x
  - Si le sinistre ne survient pas (probabilité 1-p)
    - w – αx

Le problème d'optimisation s'écrit donc
- Max [pu (w – s – αx + x) + (1 – p) u(w – αx)] en fonction de x

[4] Pour les putains d'exercice avec les actifs risqués, non-risqués,… (genre ex 9,10,13,… TP2)

Une prime d'assurance est dite actuariellement équitable si la société d'assurance réalise un profit espéré = 0

- Ici, le profit de la société d'assurance =
  - $p\ (\alpha x - x) + (1\text{-}p)\ \alpha x$
  - La société gagne d'office la prime mais risque de payer une compensation en cas de sinistre
- $p\ (\alpha x - x) + (1\text{-}p)\ \alpha x = 0 \leftrightarrow\ \alpha = p$

On cherche le max de la fonction d'utilité. On va donc chercher où sa dérivée est = 0

- $pu\ (w - s - \alpha x + x) = -\ (1 - p)\ u(w - \alpha x)$
- Lorsqu'on dérive, que constate-t-on ?
  - À gauche, il restera $(1 - \alpha)\ p$
  - À droite, il restera $--\alpha\ (1 - p)$
  - Vu que $\alpha = p$: toute cette merde se simplifie
- Il reste donc : $u'\ (w - s - \alpha x + x) = u'\ (w - \alpha x)$
  - Puisque la fonction est monotone (ici, décroissante), les deux arguments sont égaux[5]
  - $w - s - \alpha x + x = w - \alpha x \rightarrow \underline{x = s}$

En conclusion, si la prime est actuariellement équitable ($\alpha = p$), l'assuré devrait se couvrir totalement face au risque ($x = s$)… Evidemment, si $\alpha \neq p$, le résultat change. Le résultat ne dépend donc pas de l'utilité mais bien de la relation entre α et p

B. L'assurance vie : préférence dépendant de l'état

On note <u>l'utilité espérée en cas de décès</u> $\mathbf{u_0}$ et <u>l'utilité espérée en cas de vie</u> $\mathbf{u_1}$. Le choix porte sur le <u>montant de la prime d'assurance</u> **x.** Le <u>montant versé</u> en cas de décès est proportionnel à la prime : $\boldsymbol{\beta}$**x**. On connait le <u>revenu</u> **w** et la <u>proba de décès</u> **p**

→ Les paramètres sont donc : w, p, β, u_0 et u_1
Le problème d'optimisation s'écrit donc

- Max [$pu_0\ (w - x + \beta x) + (1 - p)\ u_1(w - x)$] en fonction de x

On peut reconnaitre que la proba de décès dépend du comportement décideur. C'est la question du hasard moral. De façon similaire, on peut penser que quelqu'un sera moins attentif au volant s'il est bien assuré.

C. Précaution

[5] En effet, si la fonction est monotone : un seul y est associé à un x.

On s'intéresse à un investisseur disposant d'une <u>richesse</u> **w** avec une <u>fonction d'utilité</u> **u** satisfaisant UE. Il fait face à un risque de <u>perte</u> **s** avec une <u>proba</u> **p**. La <u>somme</u> **x** qu'il est <u>prêt à payer</u> pour réduire la probabilité de p à p – ε est donnée par l'équation suivante

$$pu(w - s) + (1 - p)u(w) = (p - \varepsilon)u(w - s - x) + (1 - p + \varepsilon)u(w - x)$$

La solution est toujours croissante par rapport à ε (+ on veut ↓ la proba, + on doit ↑ x)

Lorsque l'agent est neutre par rapport au risque → u(x) = x: la solution est donnée par

- $x^* = \varepsilon s$
- càd : le gain espéré de la réduction de la proba de risque. Il est indépendant de la richesse initiale et de la proba de perte

S'il y a aversion au risque x* est décroissante par rapport à p

D. Le portefeuille

On s'intéresse à un investisseur disposant d'un <u>budget</u> **w** (allouant une <u>quantité à l'actif risqué</u> = **x**) avec une <u>fonction d'utilité</u> **u** concave (aversion au risque) satisfaisant UE. Il est confronté à un choix entre un *actif sûr (AS)* de <u>rendement</u> $\mathbf{r_0}$ et un *actif risqué (AR)* dont le <u>rendement</u> **R** est une variable aléatoire dont on connait la <u>fonction de distribution</u> **F**.

→ Les paramètres sont donc : w, r_0, u et F

Le problème de choix porte sur le montant x à investir dans l'actif risqué.

- $(1 + r_0)(w - x) + (1 + R)x$
    - Càd : (taux de rendement AS).(budget alloué AS)
      + (taux de rendement AR).(budget alloué à AR)
- $= (1 + r_0)w + x(R - r_0)$
    - Càd : (taux de rendement AS).(budget)
      + (budget alloué à AR).(différence de rendement entre les deux actifs)

Le problème d'optimisation s'écrit :cal

- Max $E[\, u(\, (1 + r_0)w + x(R - r_0)\,)\,]$
- Logiquement, il y a 2 possibilités :
    - E[R] > r0 → on investit dans l'actif risqué
    - E[R] ≤ r0 → on n'investit pas dans l'actif risqué étant donné qu'on reçoit plus avec l'actif sûr
- L'aversion au risque étant décroissante : si w ↑ → l'investissement dans AS ↑

Exemple :

- $R = r1$ avec proba p | $R = r2$ avec proba $1 - p$
- $w_i(x) = (1 + r_0)w + x(r_1 - r_0)$ $\quad\quad i = 1,2$
- Il y aura investissement dans l'actif risqué si son espérance est supérieure à r_0

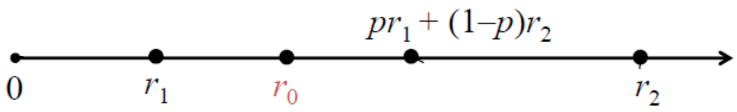


Illustration : $r_0 = 0$, $r_1 = - -\frac{1}{2}$ et $r_2 = \frac{1}{2}$

- $w_1(x) = w - \frac{1}{2}x$
- $w_2(x) = w + \frac{1}{2}x$

- Il faut maximiser : $pu(w - \frac{1}{2}x) + (1 - p)u(w + \frac{1}{2}x)$
  - Si on annule la dérivée première par rapport à x, on a :
  - $-\frac{1}{2}pu'(w_1(x)) + \frac{1}{2}(1 - p)u'(w_2(x)) = 0$
  - $pu'(w_1(x)) = (1 - p)u'(w_2(x))$
- Pour $u(x) = \ln(x) \rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$
  - $p(w - \frac{1}{2}x)^{-1} = (1 - p)(w + \frac{1}{2}x)^{-1}$
  - $p(w + \frac{1}{2}x) = (1 - p)(w - \frac{1}{2}x)$
  - $x = 2(1 - 2p)w$
- En tenant compte des contraintes $0 \leq x \leq w$: on déduit la solution
  - 0 si $p \geq \frac{1}{2}$
  - $x^* = 2(1 - 2p)w$ si $\frac{1}{4} \leq p \leq \frac{1}{2}$
  - w si $0 \leq p \leq \frac{1}{4}$

III. Introduction explicite du temps

1) Quelques notions

- $R_t = (1 + r)^{t-1} R_1$ $\quad\quad$ = $\quad\quad$ le revenu à l'année t
  - t = un période (une année par exemple)
  - r = intérêt grâce au placement
  - Par ex : le revenu à l'année 2 = $R_2 = (1+r) R_1$

- $R_1 = \frac{1}{(1+r)^\wedge(t-1)} R_t$ = la valeur présente (actualisée) d'une somme R_t en t
    - Attention : ici R1 ne veut pas dire « de l'année 1 »
    - C'est le revenu de l'année t exprimée en euros d'aujourd'hui

- Exemple : si r = 3%
    - 1000€ sur 9 ans donnent R_{10} = 1305€
    - 1000€ dans 9 ans valent 766€ ajd

2) Épargne et endettement

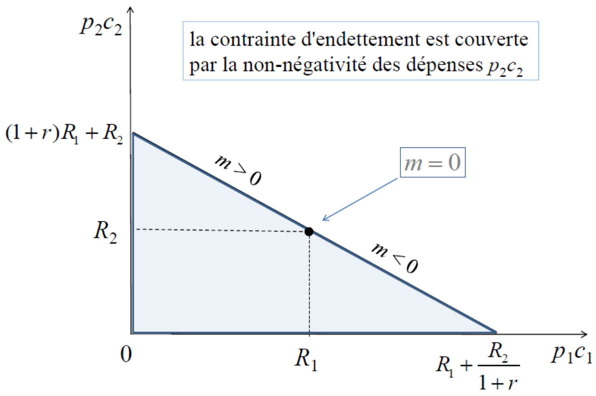
- Le choix entre épargne et endettement dépend de la conso présente et future
    - On va se limite à un bien et deux périodes (années 1 et 2)
    - On considère que le taux d'intérêt r = au taux d'emprunt ET d'endettement
    - c_1 et c_2 = les consos présente et future
    - p_1 et p_2 = les prix présents et futurs (connus)
    - R_1 et R_2 = les revenus présent et futur (connus)
    - Il n'y a pas d'incertitude (puisque p_1,p_2,R_1,R_2 sont connus)

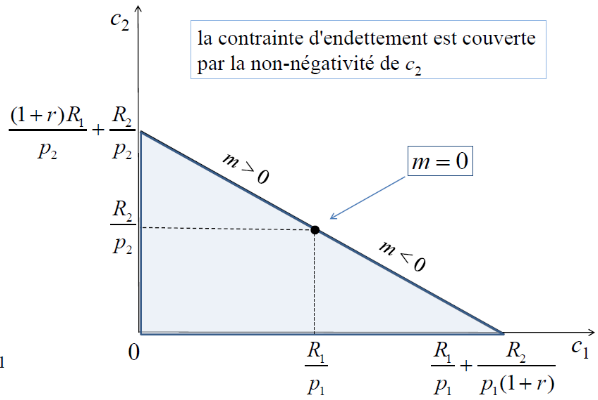
- $m = R_1 – p_1c_1$
    - le **signe de m définit l'épargne ou l'endettement**
    - Pour éviter la faillite, il ne faut pas que le revenu dont le décideur disposera en R_2 soit négatif
        - Il y a donc une contrainte d'endettement (p_2c_2 non-négatif)
        - $p_1c_1 \leq R_1 + \frac{1}{(1+r)} R_2$

3) Contrainte budgétaire inter-temporelle

- $p_1c_1 + m = R_1$
- $p_2c_2 = R_2 + (1 + r)m$

- $p_2c_2 = R_2 + (1 + r) (R_1 – p_1c_1)$
- **conso ajd + conso demain = revenu ajd + revenu demain**
    - <u>Contrainte budgétaire en valeurs futures</u>
        - $(1+r)p_1c_1 + p_2c_2 = (1+r)R_1 + R_2$
    - <u>Contrainte budgétaire en valeurs présentes</u>
        - $p_1c_1 + \frac{1}{(1+r)} p_2c_2 = R_1 + \frac{1}{(1+r)} R_2$





Au point **R1,R2 → pas de dettes et pas d'épargne → m = 0**

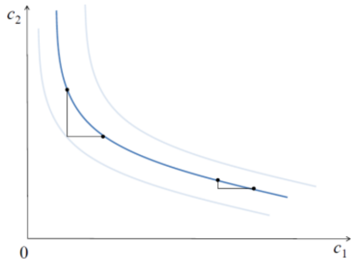
La solution est dans ce quadrant par la contrainte d'endettement

- <u>Rapport de prix</u> = **(1+r)** $\frac{p1}{p2}$ et pas $\frac{p1}{p2}$
  - En effet, ce ne sont pas « les mêmes euros »
- <u>Pente de la droite de budget</u> = - (1+r) $\frac{p1}{p2}$
  - Si i = taux d'inflation → $p_2 = (1+i)p_1$
  - La pente est donc : **-** $\frac{1+r}{1+i}$
  - Selon que r > ou < i : la pente est > ou < que 1
- <u>Le taux d'intérêt réel</u> : **ρ =** $\frac{r-i}{1+i}$

4) Préférences inter-temporelles

On peut représenter les préférences intertemporelles (c_1,c_2) par une CI

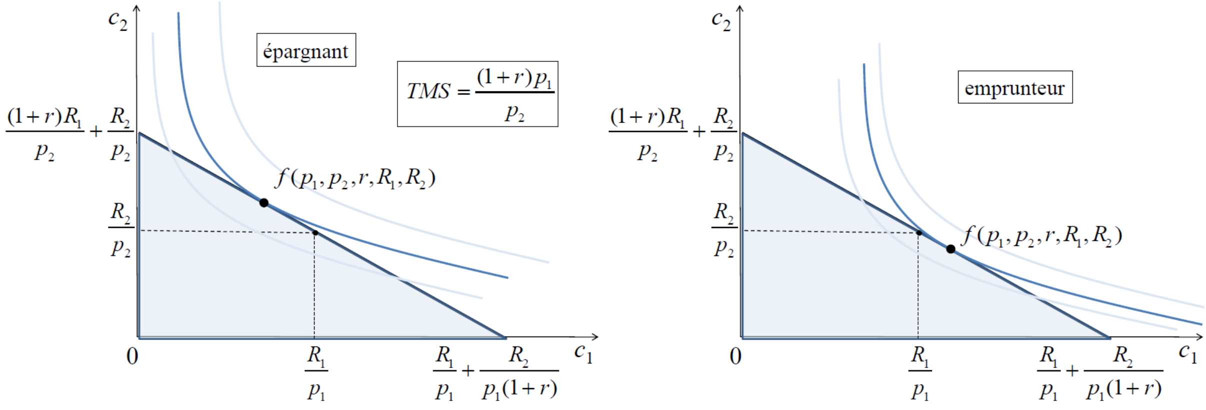
- Le TMS = la pente de la courbe d'indifférence = rapport des utilités marginales
  - + la pente est forte → + il faut ↑ la conso future pour compenser une ↓ de la conso présente (effet de substitution)



<u>La fonction d'utilité</u> : u (c_1,c_2)

- Max u(c_1,c_2) sous les contraintes $c_1,c_2 \geq 0$
  - $p_1c_1 + \frac{1}{(1+r)} p_2c_2 = R_1 + \frac{1}{(1+r)} R_2$
  - Dont la solution définit les fonctions de demande
    - $c_1 = f_1(p_1,p_2,r,R_1,R_2)$

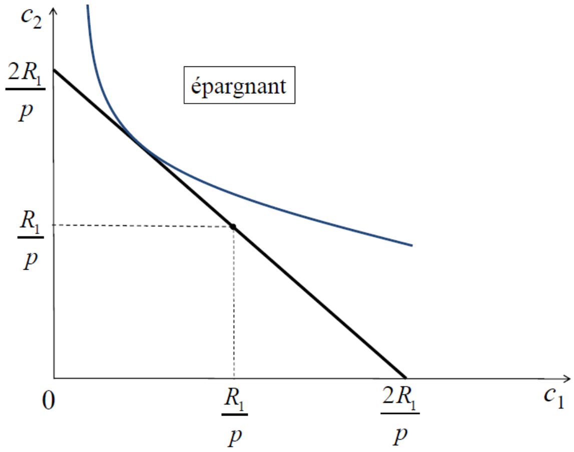
- $c_2 = f_2(p_1, p_2, r, R_1, R_2)$

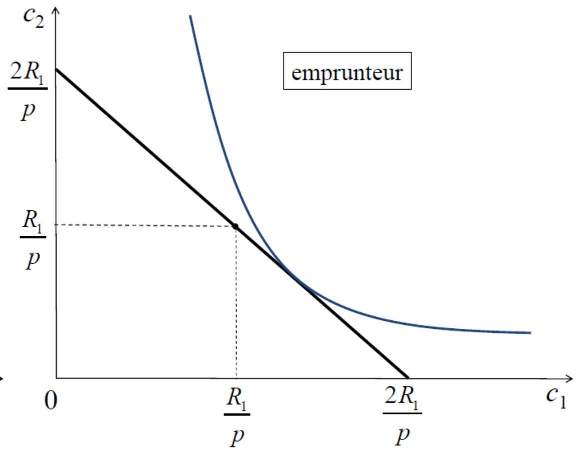


- La **fonction d'utilité de c_1 seule** = $u(c_1, \frac{(1+r)(R1-p1c1)+R2}{p2})$ (transf de la contrainte budgétaire en valeurs futures

Un changement du taux d'intérêt : fait pivoter la droite de budget autour du point ($\frac{R1}{p1}, \frac{R2}{p2}$)

  - Dans le sens horloger s'il augmente
  - Dans le sens anti-horloger s'il diminue
- L'effet sur le consommateur diffère s'il épargne ou s'endette.
  - Dans le cas de biens normaux et d'une augmentation du taux d'intérêt
    - Si $m \geq 0$: on se trouve à gauche du point fixe
      - c_2 ↑
      - l'effet sur c_1 est ambigu
    - Si $m \leq 0$: on se trouve à droite du point fixe
      - c_1 ↓
      - l'effet sur c_2 est ambigu
  - Dans le cas de biens normaux et d'une diminution du taux d'intérêt
    - Si $m \geq 0$: on se trouve à gauche du point fixe
      - c_2 ↓
      - l'effet sur c_1 est ambigu
    - Si $m \leq 0$: on se trouve à droite du point fixe
      - c_1 ↑
      - l'effet sur c_2 est ambigu
  - En conclusion :
    - Un emprunteur ↓ sa conso présente si le taux d'intérêt ↑
    - Un épargnant ↓ sa conso future si le taux d'intérêt ↓
- Dans le cas d'un taux d'intérêt nul (r = i) : $p_1 = p_2 = p$
  - La pente de la droite de budget = -1
  - Si les revenus sont parfaitement indexés : $R_2 = (1+i)R_1$
  - La contrainte budgétaire devient : $p(c_1+c_2) = R$
  - Où $R = 2R_1$





Il n'y a plus de différence entre valeurs présentes et futures. L'épargne est uniquement liée à une préférence possible pour le futur

5) Incertitude sur les revenus futurs

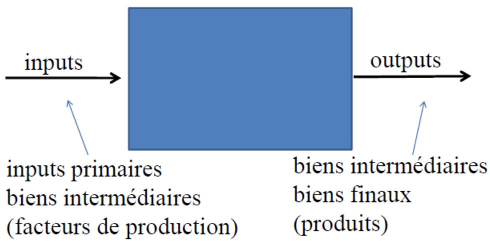
De manière générale, l'incertitude porte sur les prix futurs (inflation), les revenus futurs,…

- On se limite à l'incertitude du revenu futur
- R_2 est donc une variable aléatoire dont la distribution est connue
- On pourrait faire comme d'habitude et prendre la moyenne de R_2
  - Pas une bonne idée car les variances peuvent être fortement différentes
  - La fonction d'utilité est là même à part qu'on calcule une espérance (incertitude) et qu'on rajoute un tilde (~) sur R_2 pour montrer que c'est une variable aléatoire

Chapitre 4 : Production : efficience et décentralisation

I. Notions et hypothèses

1) Représentation de la technologie

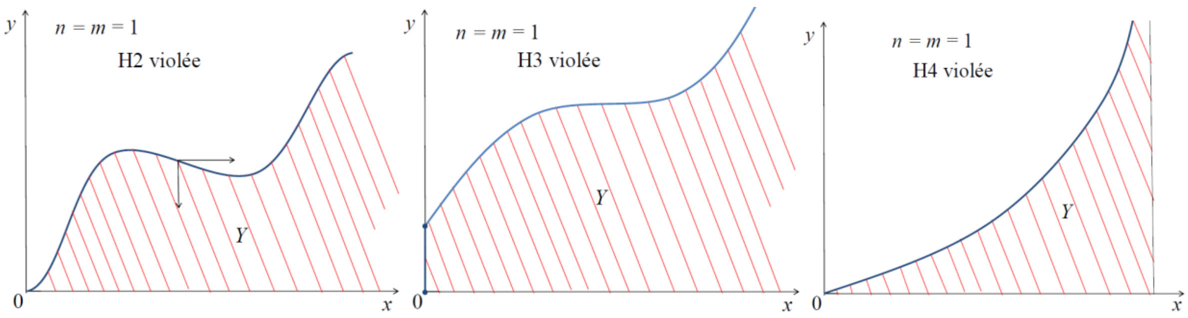


- Les inputs : facteurs de production
- Les outputs : produits

- Un plan de production : spécifie **une quantité pour chaque bien**
    - S'il y a n inputs et m outputs → il y a n + m biens
    - Un plan de production est un point de l'espace $\mathbb{R}_+^{n+m}$
    - On peut l'écrire comme un couple de vecteurs (x,y) où :
        - x ϵ $\mathbb{R}_+^{n}$ est le vecteur des n inputs
        - y ϵ $\mathbb{R}_+^{m}$ est le vecteur des m outputs
- La technologie : **l'ens Y** des plans de prod qui sont techniquement réalisables
    - sur papier = sur plan (on s'occupe pas de ce qui est disponible ou pas)
    - c'est donc l'ensemble des combinaisons d'inputs et d'outputs réalisables

2) Hypothèses

- H1 : l'inactivité est toujours possible : (0,0) ϵ Y
- H2 : le gaspillage est toujours possible :
    - Partant d'un plan de prod réalisable, il est toujours possible
        - d'**augmenter** l'utilisation de certains **inputs**
        - et/ou de **réduire** la production de certains **outputs**
    - Si (x,y) ϵ Y
        - x' ≥ x
        - y' ≤ y
        - Alors (x',y') ϵ Y
    - On parle de gaspillage sans coût
- H3 : il est impossible de produire sans inputs :
    - (0,y) ϵ Y → y = 0
    - y ≠ 0 → x ≠ 0
    - S'il n'y a **pas d'inputs**, il n'y a **pas d'outputs**
    - S'il y a des outputs, il y a des inputs
- H4 : à inputs limités, outputs limités
    - Si x ≤ $\overline{x}$ → il existe $\overline{y}$ tel que y ≤ $\overline{y}$
    - Si on a une quantité limite d'inputs, on aura une quantité limite d'outputs
    -



- Dans les graphiques ci-dessus :
    - H2 est violée car : sur une portion de la courbe : si x↓ → y↑
    - H3 est violée car : pour 0 input, il y a des outputs.

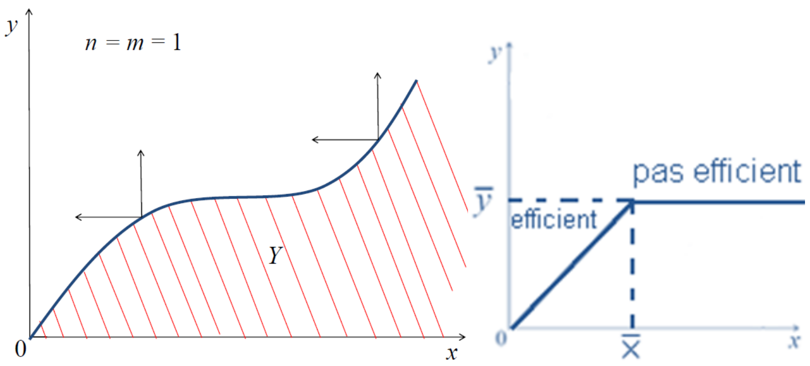
- H4 est violée car : il y a une asymptote verticale → les outputs sont illimités

II. Efficience technologique

1) Efficacité

Bien que le gaspillage soit possible, on ne retient les combinaisons inputs-outputs tq

- Il n'est pas possible de produire plus d'outputs
  - sans réduire la production d'autres outputs
  - et/ou augmenter l'utilisation de certains inputs
- Il n'est pas possible de réduire l'utilisation d'un input
  - sans réduire la production de certains outputs
  - et/ou augmenter l'utilisation d'autres inputs
- Les ensembles efficaces ne sont pas d'office toute la courbe (graphe de droite)

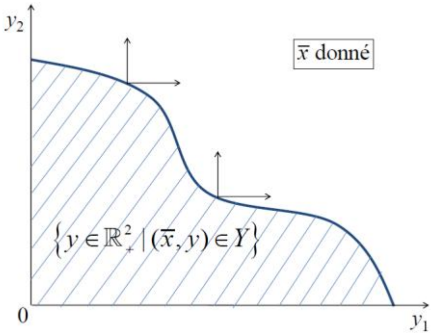


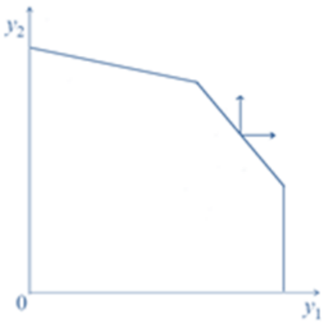
2) Deux points de vue

A. À inputs donnés

- On identifie les combinaisons d'outputs techniquement réalisables
- $\bar{x} \in \mathbb{R}^n_+ \rightarrow \{y \in \mathbb{R}^m_+ \mid (\bar{x}, y) \in Y\}$
- Efficacité : on ne retient que les combinaisons d'outputs telles qu'il n'est pas possible de produire plus de certains outputs sans réduire la productions d'autres outputs
  - Cela conduit au concept de **courbe de transformation**

- C'est donc l'ensemble des plans de production efficaces

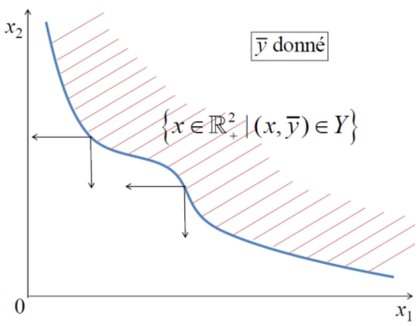




- Sur le graphique de gauche : on a bien une courbe de transformation. Le segment vertical correspond à une capacité max de production d'y_1
- Tant qu'on peut faire le schéma avec les flèches sans retomber dans l'ensemble des plans de production, c'est ok

B. À outputs donnés

- On identifie les combinaisons d'inputs techniquement réalisables
- $\bar{y} \in \mathbb{R}^m_+ \rightarrow \{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid (x, \bar{y}) \in Y\}$
- <u>Efficacité</u> : on ne retient que les combinaisons d'inputs telles qu'il n'est pas possible de réduire l'utilisation de certains inputs sans augmenter l'utilisation d'autres inputs
  - Cela conduit au concept de **courbe isoquante**
  - C'est donc l'ensemble des plans de production efficaces



3) Fonction de production

A. Définition

- Dans un premier temps, on se limite au cas où il n'y a qu'un output (m = 1).

- On peut donc définir le concept de **fonction de production**
  - $y = F(x_1,\ldots,x_n)$

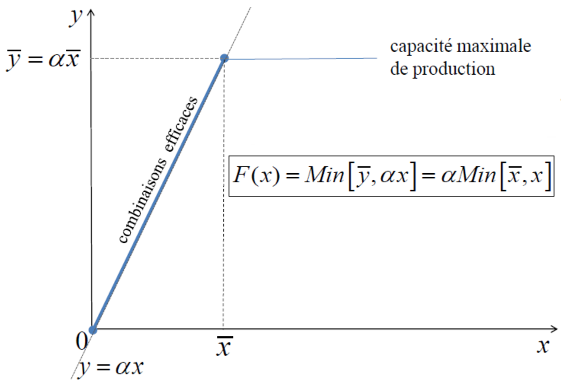
- où y est la quantité produite et $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, les combinaisons possibles d'inputs

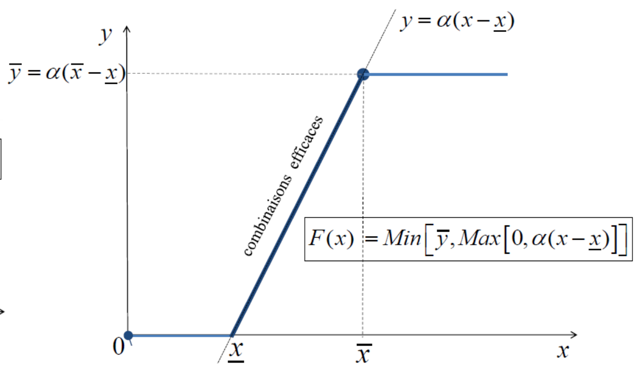
- **L'ensemble de production** est donc donné par
  - $Y = \{ ((x_1,\ldots,x_n,y) \in \mathbb{R}_+^{n+1} \mid y \leq F(x_1,\ldots,x_n)\}$
  - Si on s'intéresse à l'efficacité : $y = F(x_1,\ldots,x_n)$

B. Implications des hypothèses

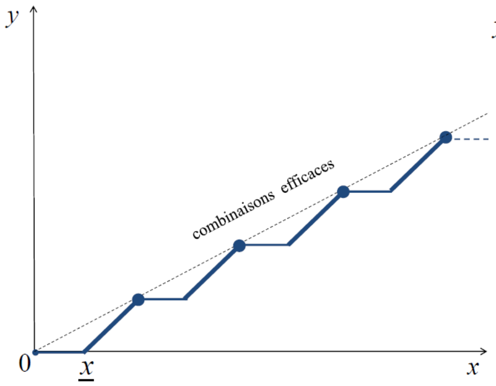
- H1 : inactivité : $F(0) = 0$
- H2 : gaspillage : F est non décroissante : si $x_1 \downarrow \rightarrow y \downarrow$
- H3 : pas d'output sans input : si $F(x) > 0$ alors $x_h > 0$

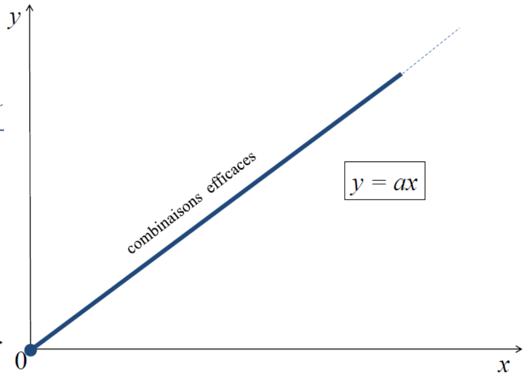
C. Le cas le plus simple : un input – un output



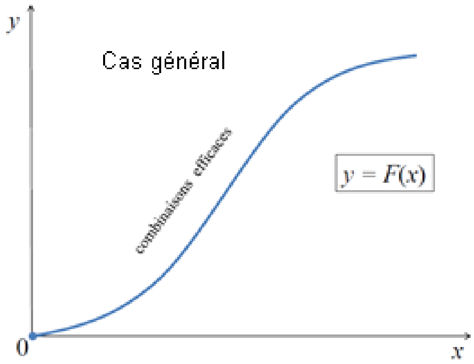


- Graphe de gauche : **pas de coûts fixes**
  - Les combinaisons sont efficaces jusqu'au moment où on ne minimise plus le nombre d'inputs utilisés pour obtenir le nombre d'output maximal
  - La droite est divisible : si $x \rightarrow y \downarrow$ dans la même proportion
- Graphe de droite : **coûts fixes**
  - Les combinaisons sont efficaces jusqu'au moment où on ne minimise plus le nombre d'inputs utilisés pour obtenir le nombre d'output maximal mais il faut également tenir compte du coût fixe. On prend donc le maximum entre la droite à gauche de $\underline{x}$: 0 et à droite de $\underline{x}$: α $(x-\underline{x})$
  - La droite n'est pas divisible : si $x \rightarrow y \downarrow$ pas nécessairement dans la même proportion



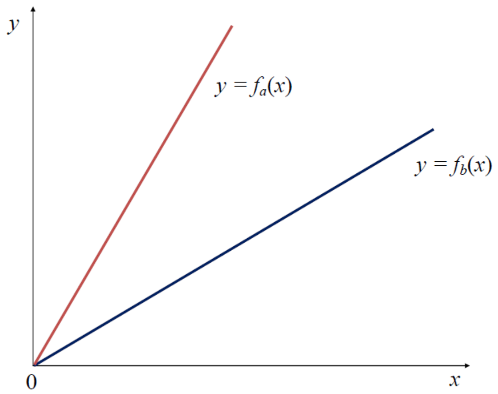


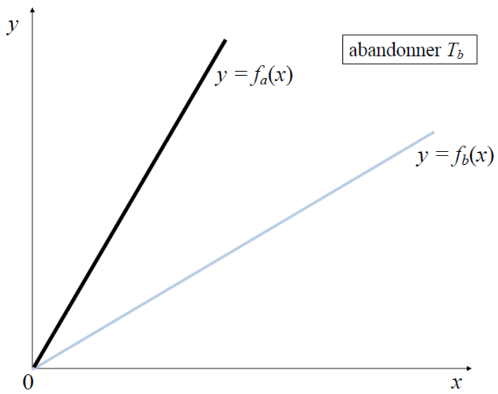
- A gauche : on combine plusieurs machines
- A droite : énormément de machines avec coût fixe ou quelques machines mais sans coûts fixes



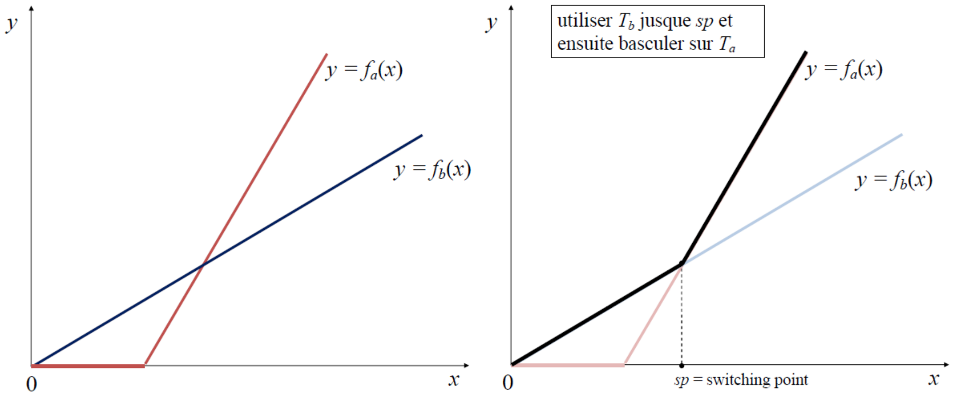
D. *Quelques exemples*

- Deux technologies Ta et Tb produisent le même output avec le même input. Les deux fonctions de production :
  - y = fa (x)
  - y = fb(x)
- On cherche à optimiser l'utilisation des deux technologies pour permettre une production max. F(x) = y est la fonction de production « globale » qui associe le niveau max d'output à tout niveau d'input x (la meilleure combinaison des fonctions a et b)

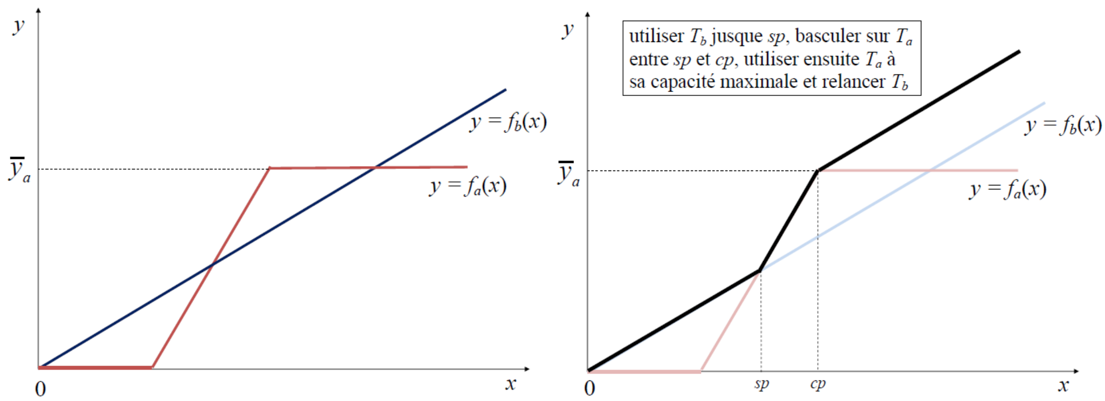




Dans ce cas-là, le plus avantageux est d'abandonner la technologie b est de concentrer toute la production sur la technologie a : $F(x) = f_a(x)$

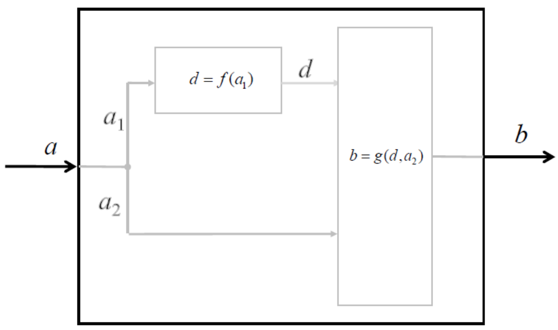


Dans ce cas-là, le plus avantageux est de concentrer la production sur la technologie b si on a une quantité d'input inférieure au point de bascule. Si la quantité d'input est supérieure à sp, il est préférable d'utiliser la technologie a : F(x) = fonction en noir



Dans ce cas-là, il est plus avantageux d'utiliser T_b jusque sp, d'utiliser T_a entre sp et cp, et d'utiliser T_b après cp

Remarque :



$\boxed{a_1 + a_2 = a}$ $\boxed{b = g(f(a_1), a_2) = G(a_1, a_2)}$ µ

- b dépend d'a_2 et d mais on peut exprimer d en fonction d'a_1. Donc, b dépend d'a_1 et a_2
- Attention $G(a_1, a_2)$ n'est PAS la fonction de production
  - La fonction de production $b = F(a)$

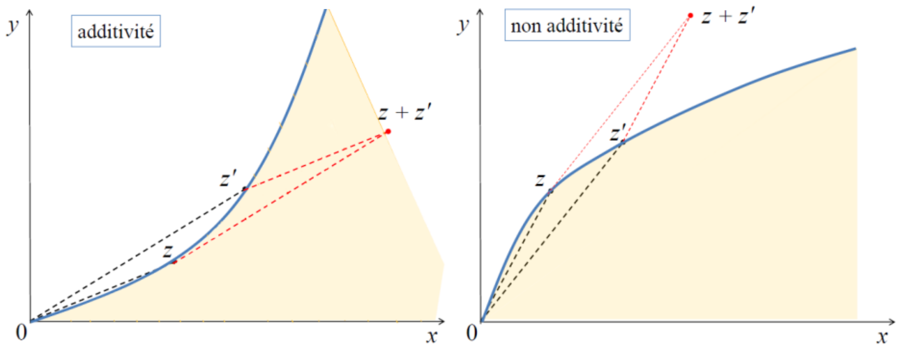
- $= \text{Max } G(a_1, a - a_1)$
    - Sous les contraintes $0 \leq a_1 \leq a_2$

III. Rendements d'échelle[6]

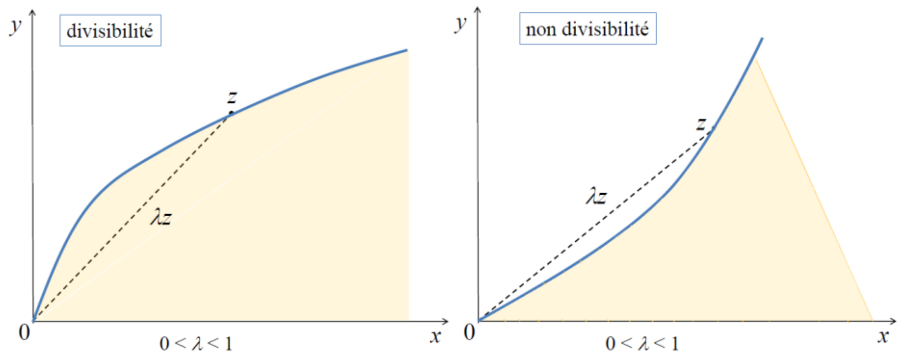
1) Rendements d'échelle : un input – un output

A. Point de départ : deux hypothèses

- Additivité :
    - Si (x', y') et $(x'', y'') \in Y \rightarrow (x', y') + (x'', y'') \in Y$
    - Conséquence du fait qu'on considère une liste claire de tous les inputs
    - Si l'hypothèse est violée c'est qu'il y a des facteurs de production cachés
- Divisibilité :
    - $(x, y) \in Y$ et $0 \leq \lambda \leq 1 \rightarrow \lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \in Y$
    - Lorsqu'on divise le processus par un facteur λ : la combinaison input-output reste dans l'ensemble des paniers réalisables
    - λ = **échelle de production**



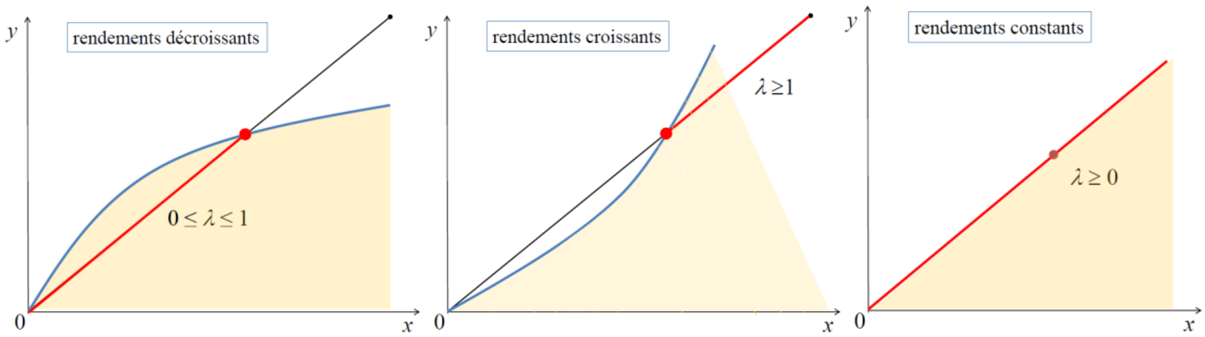
[6] Modifier les quantités d'échelle = multiplier tous les inputs ou tous les outputs par un même nombre



- <u>Si additivité et divisibilité sont vérifiées en même temps</u> : **λ ≥ 1 → (λx,λy) ϵ Y** :
    - On est dans le cas de **rendements d'échelle constants**
    - En effet, la divisibilité impose la concavité de la fonction de production tandis que l'additivité impose la convexité. La fonction de production est donc une droite

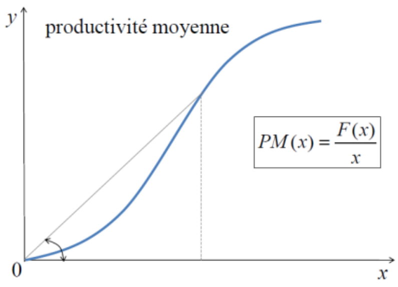
- <u>Si l'additivité est vérifiée</u> : **λ ≥ 1 → (λx,λy) ϵ Y** :
    - On est dans le cas de rendements d'échelle non décroissants[7]
    - En effet, en multipliant inputs et outputs par un facteur supérieur à 1, on reste dans l'ensemble réalisable

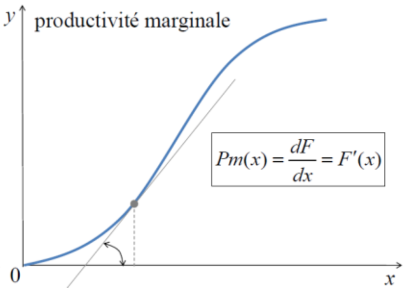
- <u>Si la divisibilité est vérifiée</u> : **0 ≤ λ ≤ 1 (λx,λy) ϵ Y** :
    - On est dans le cas de rendements d'échelle non croissants[8]
    - En effet, en divisant inputs et outputs par un facteur supérieur à 1, on reste dans l'ensemble réalisable

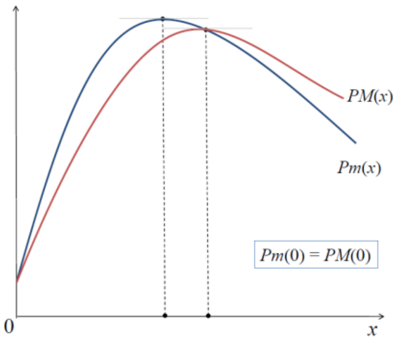


B. *Rappel : productivité moyenne et productivité marginale*

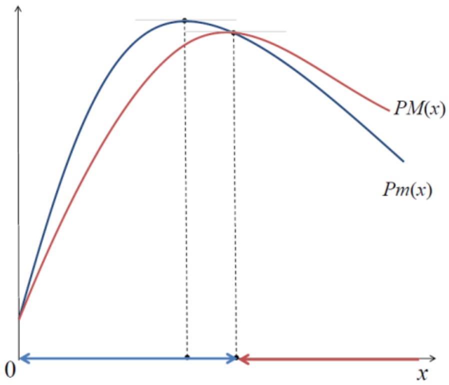
[7] croissants si la fonction de prod est convexe ou constants si la fonction de prod est une droite
[8] décroissants si la fonction de prod est concave ou constants si la fonction de prod est une droite







- Les rendements sont croissants si la PM est croissante
- Les rendements sont décroissants si la PM est décroissante
- Les rendements sont constants si la PM est constante

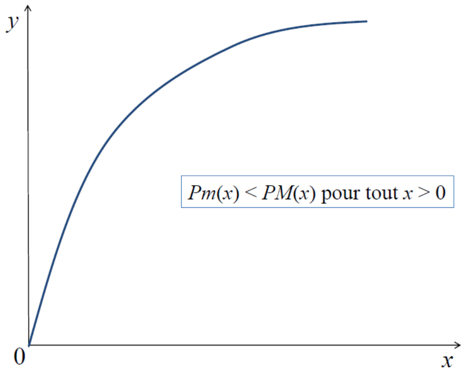


Que remarque-t-on ?

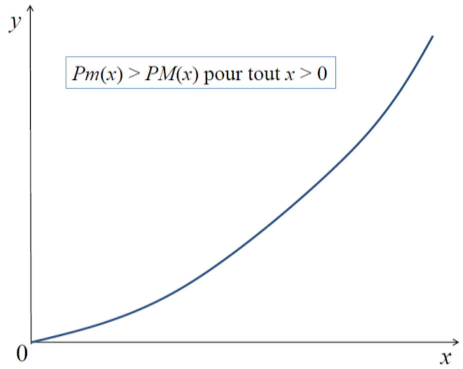
- Dans la zone bleue, les rendements sont croissants tandis que dans la zone rouge, ils sont décroissants
- En effet, dans la zone bleue, PM est croissante tandis que dans la zone rouge, PM est décroissante
- Le maximum de PM est le point d'intersection entre PM et Pm

- En dérivant PM'(x) on obtient $PM'(x) = \frac{Pm(x) - PM(x)}{x}$
  - Pm > PM dans la zone où les rendements d'échelle sont croissants
  - Pm < PM dans la zone où les rendements d'échelle sont décroissants
  - Pm = PM : la productivité moyenne est à son maximum

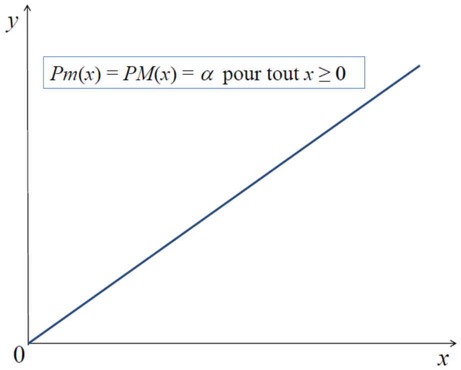
Rendements d'échelle décroissants: Pm et PM partout décroissantes



Rendements d'échelle croissants: Pm et PM partout croissantes



Rendements d'échelle constants: Pm et PM constantes



2) Rendements d'échelle : plusieurs inputs

A. Rendements d'échelle

- On parle de <u>rendements d'échelle croissants</u> si :
    - **$F(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_n) > \lambda F(x_1,x_2,\dots,x_n)$** si $\lambda > 1$
    - <u>En effet</u> : En multipliant chaque input par un même facteur, la production est plus que multipliée par ce facteur
    - Parallèle avec le cas d'un input unique :
        - $F(\lambda x) > \lambda F(x)$ si $\lambda > 1$
        - $\frac{F(\lambda x)}{\lambda x} > \frac{\lambda F(x)}{\lambda x} = \frac{F(x)}{x}$
        - PM $(\lambda x) >$ PM (x)
        - PM est croissante en x

- On parle de <u>rendements d'échelle décroissants</u> si :
    - **$F(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_n) < \lambda F(x_1,x_2,\dots,x_n)$** si $\lambda > 1$
    - <u>En effet</u> : En multipliant chaque input par un même facteur, la production est « moins que » multipliée par ce facteur

- On parle de <u>rendements d'échelle constants</u> si :
    - **$F(\lambda x_1,\lambda x_2,\dots,\lambda x_n) = \lambda F(x_1,x_2,\dots,x_n)$** si $\lambda > 0$

- <u>En effet</u> : En multipliant chaque input par un même facteur, la production est égale au cas où c'est la production qui est multipliée par ce facteur

B. Productivité moyenne et productivité marginale

- Il n'y a **pas de notion de productivité moyenne**

- On définit les **productivités marginales** : $Pm_h\,(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \frac{\partial F}{\partial xh}\ (h = 1,2,\ldots,n)$

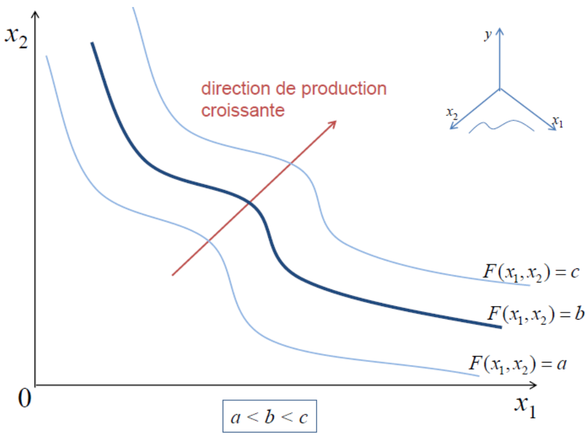
  - F étant non décroissante, les Pm sont non négatives
  - Si les rendements d'échelle sont décroissants, les productivités marginales sont décroissantes : $\frac{\partial Pmh}{\partial xh} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2 h} < 0$
  - Le signe de l'effet « croisé »[9] nous renseigne sur la nature de l'interaction entre deux inputs h et k
    - $\frac{\partial Pmh}{\partial xk} = \frac{\partial^2 F}{\partial xhxk} < 0$ inputs substituts
    - $\frac{\partial Pmh}{\partial xk} = \frac{\partial^2 F}{\partial xhxk} > 0$ inputs complémentaires

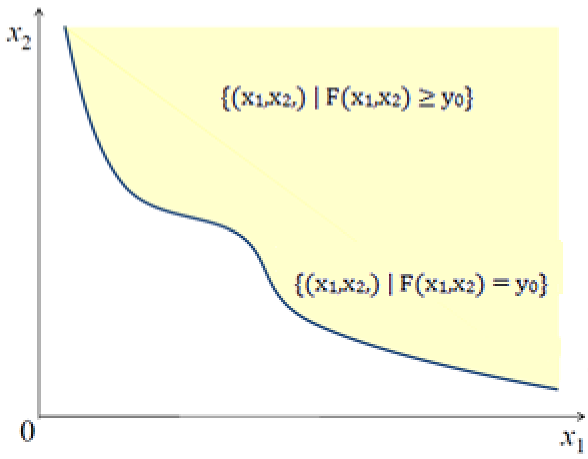
3) Courbe isoquante et Taux marginal de substitution

A. Définition et Hypothèses

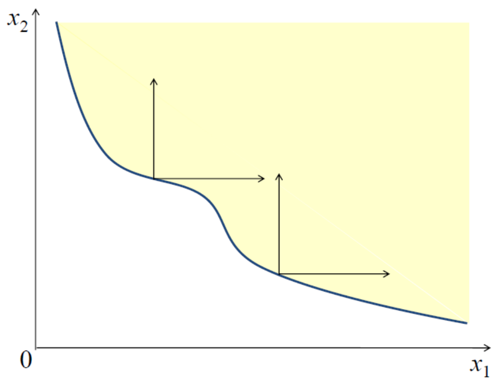
- <u>Définition</u> : **courbe iso-produit** :
  - À un **certain** niveau de **production**, on associe le lieu des combinaisons d'**inputs efficaces** permettant de produire à ce niveau
  - $y_0 > 0 \rightarrow \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \mid F(x_1,x_2,\ldots,x_n) = y_0\}$
  - Ce sont des **courbes de niveau** (ou courbes de contour). C'est l'équivalent des courbes d'indifférences

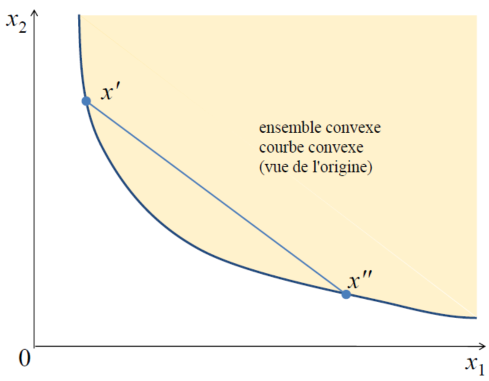
[9] Calcul de dérivée croisée. On regarde comment la production varie en fonction de l'input h et de l'input k



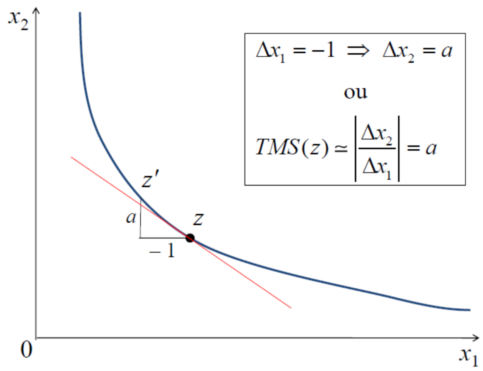


- Deux hypothèses :
  - Monotonicité : x' > x'' → F(x') > F(x'')
  - Convexité : F(x') = F(x'') → F(λx' + (1-λ)x'') > F(x')





B. *Taux marginal de substitution*

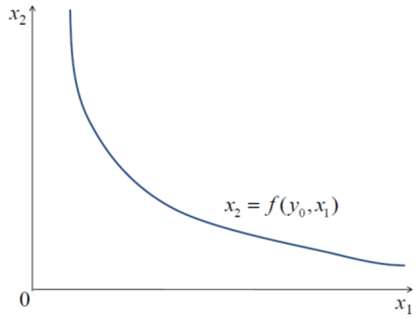


- Taux marginal de substitution = pente de l'isoquante

- $\text{TMS}(x) = -\frac{dx2}{dx1} = \frac{\partial F / \partial x1}{\partial F / \partial x2}$

C. *Explicitation de l'isoquante*

- Monotonicité et convexité imposent que les isoquantes sont des courbes convexes. Le **TMS** est donc **décroissant** le long de toute isoquante
- On peut donc écrire une isoquante comme une relation entre x1 et x2
    - $X_2 = f(y_0, x_1) \leftrightarrow F(x_1, x_2) = y_0$
    - $\text{TMS}(x) = -\frac{dx2}{dx1} = -\frac{\partial f}{\partial x1}$



4) Fonction de production "Cobb-Douglas"

- Fonction de production

$$\boxed{F(x_1, x_2) = Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta} \quad (A, \alpha, \beta > 0)}$$

- Il y a 3 paramètres : A est un coefficient de taille tandis que α + β détermine le type de rendements d'échelle

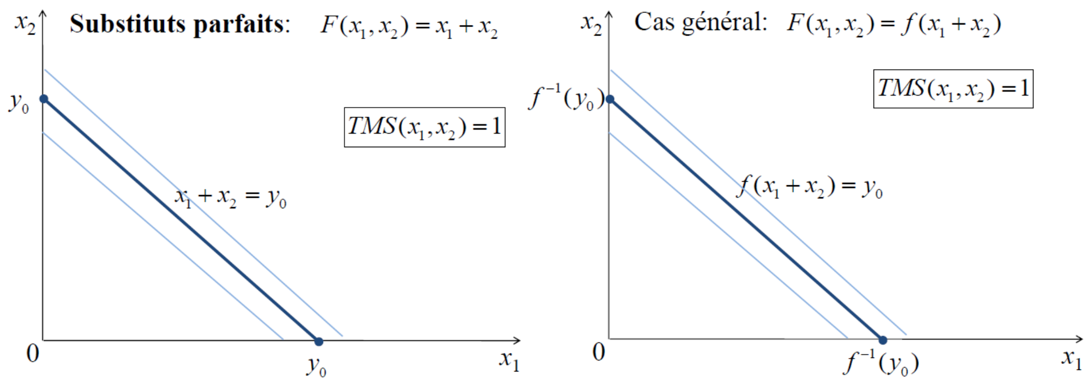
$$F(\lambda x_1, \lambda x_2) = A(\lambda x_1)^{\alpha} (\lambda x_2)^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta} A x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

- Les rendements d'échelle sont croissants ou décroissants selon que la somme α + β est plus grande ou plus petite que 1

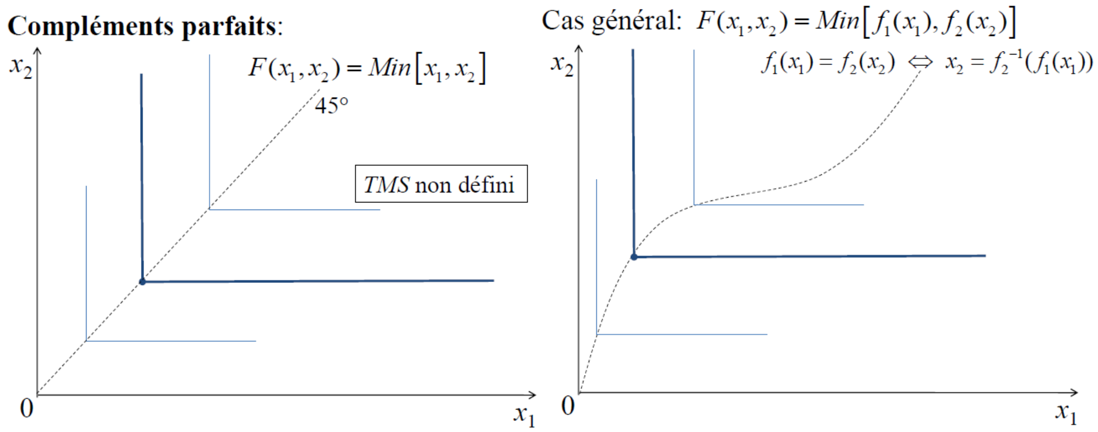
- Equation des isoquantes : $x_2 = f(y_0, x_1)$

$$Ax_1^{\alpha} x_2^{\beta} = y_0 \iff x_2 = \left(\frac{y_0}{Ax_1^{\alpha}}\right)^{1/\beta} = \left(\frac{y_0}{A}\right)^{1/\beta} x_1^{-\alpha/\beta}$$

5) Substituts parfaits et compléments parfaits



Si on peut écrire la fonction de production comme une somme des deux inputs, alors ces deux inputs sont des substituts parfaits



6) Fonction de coût

A. *Définition*

- Partant d'un ensemble de production impliquant n inputs et m outputs, on **associe** à tout vecteur d'outputs $\mathbf{y_0}$ l'ensemble des **combinaisons d'inputs** réalisables :

$$\{x \in \mathbb{R}^n_+ \mid (x,y_0) \in Y\}$$

- Le sous-ensemble formé des **combinaisons d'inputs efficaces** constitue la **courbe d'isoquante.** Elle fait partie de la frontière de l'ensemble des combinaisons d'inputs réalisables

- Si $w = (w_1,\ldots,w_n)$ sont les prix des inputs et $x = (x_1,\ldots,x_n)$ la combinaison d'inputs : le **dépenses** sont données par :

$$w.x = \sum_{h=1}^{n} WhXh$$

- Le **coût** de produire le vecteur d'outputs y_0 correspond à la combinaison d'inputs qui **minimise les dépenses** :

$$C(w, y_0) = Min_x w.x \text{ sur l'ensemble } \left\{x \in \mathbb{R}_+^n \mid (x, y_0) \in Y\right\}$$

$$\text{ou}$$

$$C(w, y_0) = Min_x w.x \text{ sous la contrainte } (x, y_0) \in Y$$

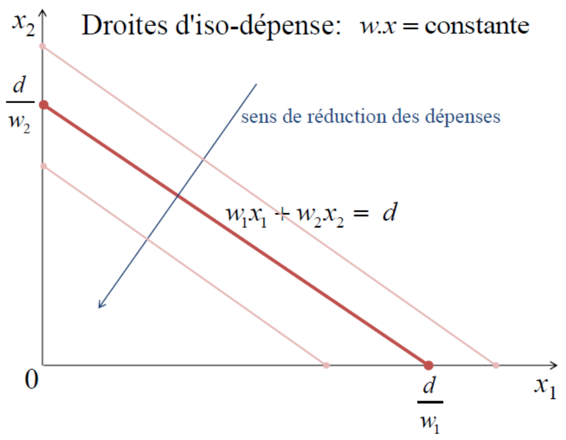
- La fonction de coût : $C(w,y)$: associe la **dépense minimale** associée à une combinaisons d'outputs y donnée
    - Elle fait intervenir $n + m$ arguments : le **prix** des **n inputs** et les **quantités** des **m outputs**
    - Dans le cas d'un seul output ($m=1$) et d'une technologie Y décrite par une fonction de production $F(x)$, le problème d'optimisation définissant la fonction de coût devient :

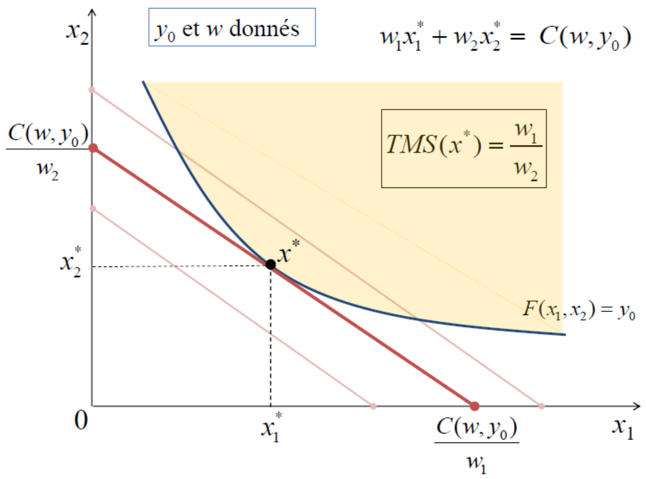
$$C(w, y_0) = Min_{x \geq 0} w.x \quad \text{sous la contrainte } F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_0$$

- Propriété : La fonction de coût est homogène de degré 1 dans les prix des inputs
    - $C(\lambda w,y) = \lambda C(w,y)$ pour tout $\lambda > 0$
    - La fonction de coût est donc croissante dans tous ses arguments : les prix des inputs et les quantités d'outputs

- Rendements d'échelle : à prix d'inputs donnés
    - Rendements d'échelle **croissants** : $C(\lambda y) < \lambda C(y) \quad \lambda > 1$
    - Rendements d'échelle **décroissants** : $C(\lambda y) > \lambda C(y) \quad \lambda > 1$
    - Rendements d'échelle **constants** : $C(\lambda y) = \lambda C(y) \quad \lambda > 1$

B. Droite d'iso-dépense





- La droite d'iso-dépense est une droite sur laquelle la dépense totale est semblable :
  - $w_1x_1 + w_2x_2 = c$
- La solution optimale est le point de tangence entre la droite d'iso-dépense et l'isoquante

C. *Comment obtenir la fonction de coût*

- Donnée : la fonction de production $F(x_1,x_2)$
- Etape 1 : On calcule le TMS grâce à la formule avec les dérivées partielles
  - Càd : $TMS = \frac{\partial F \,/\, \partial x1}{\partial F \,/\, \partial x2}$
- Etape 2 : On fait correspondre le résultat obtenu avec la formule selon laquelle le TMS est le rapport des prix (produit croisé).
  - Càd : Le résultat obtenu $= TMS = \frac{w1}{w2}$
- Etape 3 : On isole x_1 dans une équation et x_2 dans une autre.
- Etape 4 : On sait que $F(x_1,x_2) = y_0$. On remplace x_1 par sa valeur dans cette équation. On fait de même avec x_2
- Etape 5 : On sait que la fonction de coût : $C(w_1,w_2,y_0) = w_1x_1 + w_2x_2$

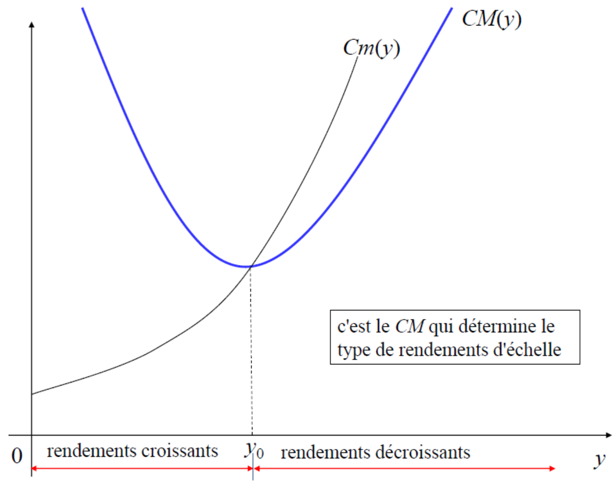
7) Coût marginal et coût moyen

- Coût marginal (associé à chaque output h) : $Cm_h\ (w,y) = \frac{\partial c}{\partial yh}$

- Coût moyen : $CM\ (w,y) = \frac{c(w,y)}{y}$

- Il n'y a pas de coût moyen dans le cas où il y a plusieurs outputs

- Dans le cas mono-produit :
  - rendements d'échelle croissants ↔ CM décroissant
    - CM (λy) < CM (y)
  - rendements d'échelle décroissants ↔ CM croissant
    - CM (λy) > CM (y)



8) Sous-additivité et économies de gamme

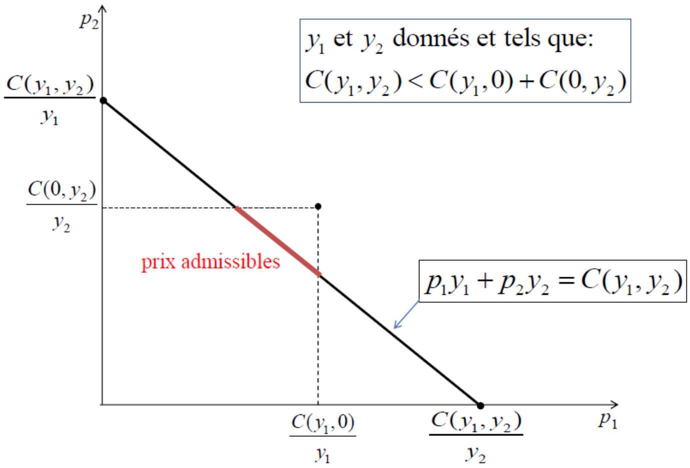
- La sous additivité :
  - C(y'+y'') < C(y') + C(y'')
  - Il est préférable de rassembler la production
  - La principale cause de sous-additivité est la **complémentarité** entre produits

$$\frac{\partial}{\partial y_1} Cm_2(y) = \frac{\partial^2 C}{\partial y_1 \partial y_2} < 0$$

- Les économies de gamme :
  - $C(y_1,y_2) < C(y_1,0) + C(0,y_2)$
  - Cas particulier de la première hypothèse

- La sous-additivité est la caractéristique d'un **monopole naturel.** Si le monopole n'est pas protégé, l'entreprise souhaitera éviter la perte de sa position dominante en pratiquant des prix qui n'attire pas d'autres entreprises
  - 1e condition : **profit nul**
    - $p_1y_1 + p_2y_2 = C(y_1,y_2)$
    - il n'y a donc pas de signal susceptible de déclencher l'entrée d'autres entreprises sur les deux segments
  - 2e condition : **absence de subventions croisées**
    - $p_1y_1 < C(y_1,0)$ et $p_2y_2 < C(0,y_2)$

    - il n'y a donc pas de signal susceptible de déclencher l'entrée d'autres entreprises sur un des deux segments



  - L'absence de subventions croisées est un cas particulier de :
    - $p_1y'_1 + p_2y'_2 < C(y'_1,y'_2)$ pour tout $(y'_1,y'_2) < (y_1,y_2)$
    - il n'y a donc pas de signal susceptible de déclencher l'entrée partielle d'autres entreprises sur les deux segments

IV. Maximisation du profit

1) Introduction : profit et maximisation du profit

- Point de départ : une technologie décrite par un ensemble de production Y impliquant n inputs et m outputs

- Connaissant les prix des inputs $w = (w_1,...,w_n)$ et les prix des outputs $p = (p_1,...,p_n)$, la **valeur d'un plan de production** (x,y) est le **« profit »** :

$$p.y - w.x = \sum_{j=1}^{m} p_j y_j - \sum_{j=1}^{n} w_j x_j$$

- Le **problème de maximisation** du profit s'écrit : Max [p.y – w.x] sous la contrainte (x,y) ϵ Y
  - Dans le cas mono-produit, il devient : $\text{Max}_{x\geq 0}$ [pF(x) – w.x]. En effet, dans le cas d'un seul produit, on peut parler de fonction de production
  - À y donné, on min w.x tandis qu'à x donné, on max p.y

2) Cas d'un output et de deux inputs

$$Max_{(x_1,x_2)\geq 0}\left[pF(x_1,x_2)-(w_1x_1+w_2x_2)\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$p\frac{\partial F}{\partial x_h}=w_h \quad (h=1,2) \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} Pm_1(x)=\dfrac{w_1}{p} \\ Pm_2(x)=\dfrac{w_2}{p}\end{array}}$$

Il y a donc égalité entre les **productivités marginales** et les **prix réels** des inputs

La solution définit les **fonctions de demande** d'inputs (homogènes de degré 0) :

$$x_1=f_1(p,w_1,w_2)$$

$$x_2=f_2(p,w_1,w_2)$$

Qu'on peut écrire en termes de **prix réels** des inputs :

$$x_1=f_1(\frac{w_1}{p},\frac{w_2}{p})$$

$$x_2=f_2(\frac{w_1}{p},\frac{w_2}{p})$$

On en déduit la **fonction d'offre** (homogène de degré 0)

$$y=g(p,w_1,w_2)=F(f_1(p,w_1,w_2),f_2(p,w_1,w_2))$$

Et la **fonction de profit** (homogène de degré 1)

$$\Pi(p,w_1,w_2)=pg(p,w_1,w_2)-w_1f_1(p,w_1,w_2)-w_2f_2(p,w_1,w_2)$$

La maximisation du profit implique la **minimisation des dépenses**, conditionnellement à l'output optimal

$$\boxed{\begin{array}{l} Pm_1(x)=\dfrac{w_1}{p} \\ Pm_2(x)=\dfrac{w_2}{p}\end{array}} \Rightarrow \frac{Pm_1(x)}{Pm_2(x)}=\frac{w_1}{w_2} \Rightarrow \boxed{TMS(x)=\frac{w_1}{w_2}}$$

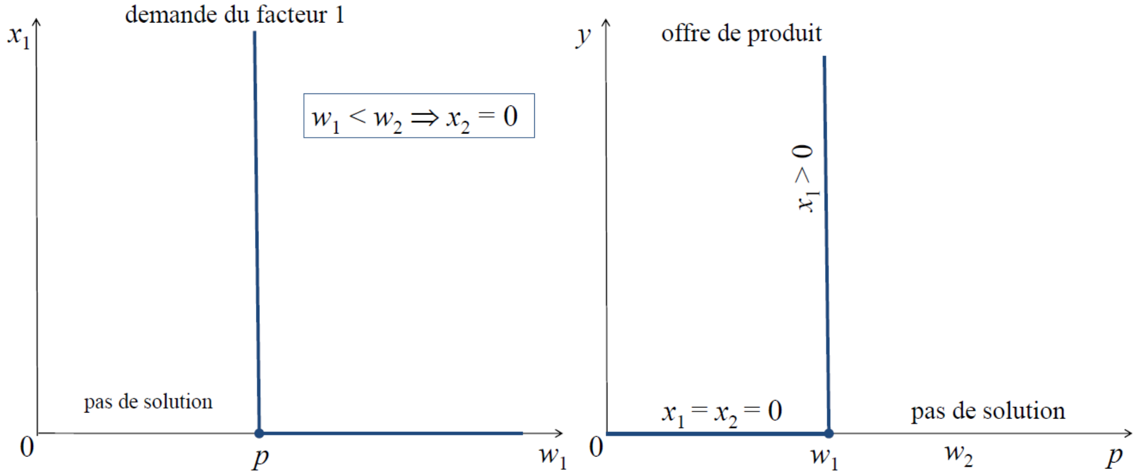
3) Cas d'inputs parfaitement substituables

$$y = x_1 + x_2$$

$$Max\left[(p-w_1)x_1+(p-w_2)x_2\right] \quad \text{avec } w_1<w_2$$

- $x_2 = 0$
- Si $p > w_1$ il n'y a pas de solution
- Si $p < x_1$ alors $x_1 = 0$

- Si $p = w_1$ alors il y a indétermination



- Dans ce cas-ci, les rendements d'échelle sont **constants**

- Si les rendements d'échelle sont **constants**, le profit est nul à toute solution :

$$\text{si } F(x^*) - w.x^* > 0 \text{ et } \lambda > 1$$

$$\Downarrow$$

$$F(\lambda x^*) - \lambda w.x^* = \lambda\left(F(x^*) - w.x^*\right) > F(x^*) - w.x^*$$

En contradiction à la maximisation du profit

- Si les rendements d'échelle sont **partout croissants**, il n'y a pas de solution car le profit est croissant

S'il existe une solution x^*, on a :

$$F(x^*) - w.x^* \geq 0 \text{ et } \lambda > 1$$

$$\Downarrow$$

$$F(\lambda x^*) - \lambda w.x^* > \lambda\left(F(x^*) - w.x^*\right) \geq F(x^*) - w.x^*$$

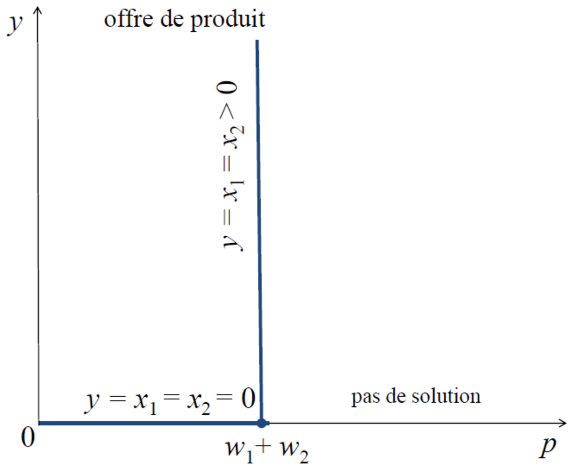
En contradiction à la maximisation du profit

4) Cas d'inputs parfaitement complémentaires

$y = \mathrm{Min}(x_1, x_2)$ | efficience : $y = x_1 = x_2$

$$Max\left[py - w_1x_1 - w_2x_2\right] \Leftrightarrow Max\left[p - (w_1 + w_2)\right]x_1$$

- Si $p > w_1 + w_2$ il n'y a pas de solution
- Si $p < w_1 + w_2$ alors $y = 0$
- Si $p = w_1 + w_2$ il y a indétermination



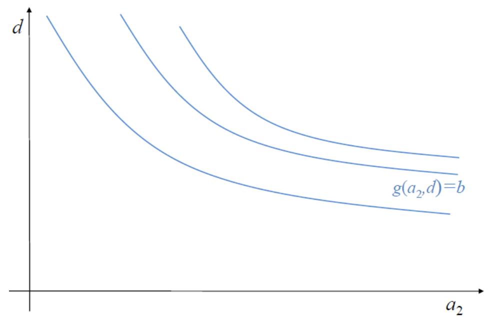
5) Retour à l'exemple vu précédemment

Dans l'exemple impliquant les technologies T1 et T2, la fonction de production b = F(a) résultait du problème d'optimisation suivant :

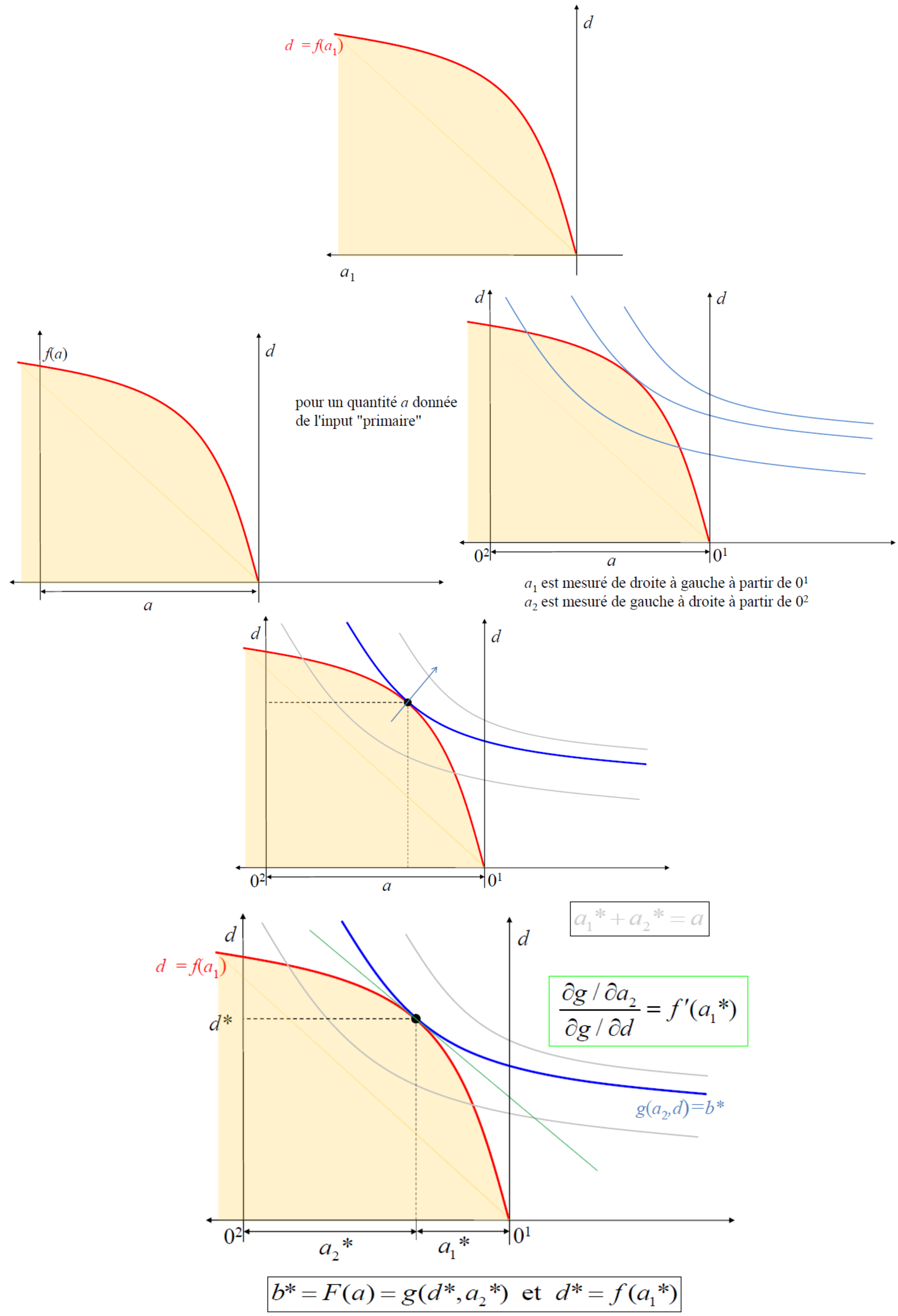
- F(a) = Max(a1,a2) g(f(a1),a2) sous les contraintes a1,a2 ≥ 0 et a1 + a2 = a

Les conditions du premier ordre pour une solution intérieure conduisaient à l'égalité suivante

- $\frac{\partial g \,/\, \partial a1}{\partial g \,/\, \partial d}$ = f '(a1)
- taux marginal de substitution = productivité marginale



La quantité d'output b dépend de l'allocation entre d et a (en quantité a2 puisque a1 est utilités pour d)



Supposons que les deux entreprises maximisent leur profit indépendamment, étant donnés les prix (p,q,w) :

$$\text{Max}\,[qf(a_1) - wa_1] \text{ et Max}\,[pg(d,a_2) - qd - wa_2]$$

On retrouve la condition d'efficience

$$q\,f'(a_1) = w \qquad\qquad f'(a_1) = \frac{w}{q}$$

$$p\frac{\partial g}{\partial d} = q \quad \longrightarrow \qquad\qquad \longrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial g / \partial a_2}{\partial g / \partial d} = f'(a_1)}$$

$$p\frac{\partial g}{\partial a_2} = w \qquad\qquad \frac{\partial g / \partial a_2}{\partial g / \partial d} = \frac{w}{q}$$

La fusion des deux entreprises conduit au même résultat. La maximisation du profit joint

$$\text{Max}\,[pg(f(a_1), a_2) - w(a_1 + a_2)]$$

conduit à :

$$p\frac{\partial g}{\partial d} f'(a_1) = w \quad \longrightarrow \quad \boxed{\frac{\partial g / \partial a_2}{\partial g / \partial d} = f'(a_1)}$$

$$p\frac{\partial g}{\partial a_2} = w$$

- Cet exemple illustre les propositions générales suivantes :
  - La maximisation du profit individuel à prix donnés conduit non seulement à l'efficience individuelle mais aussi à l'efficience agrégée
  - Si les entreprises maximisent leurs profits indépendamment et à prix donnés, le résultat est le même que si elles maximisaient leur profit joint à ces mêmes prix
  - En clair, des managers indépendants ont les mêmes décisions qu'un manager général car ils réagissent aux mêmes signaux

6) Autre illustration

Considérons une entreprise avec 2 sites. L'objectif est de répartir la production entre les deux pour maximiser le profit total

$$Max_{(y_1,y_2)\geq 0}\ \Pi(y_1,y_2) = p(y_1+y_2) - C_1(y_1) - C_2(y_2)$$

yj est la production sur le site j

Cj est la fonction de coût du site j

Si on annule les dérivées premières du profit, on obtient :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y_1} = p - Cm_1(y_1) = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial y_2} = p - Cm_2(y_2) = 0$$

$$\boxed{p = Cm_1(y_1) = Cm_2(y_2)}$$

La prod est répartie de manière telle que les Cm sont égaux entre eux. Cette solution est valable pour autant que :

$$p \geq Cm_1(0) \text{ et } p \geq Cm_2(0)$$

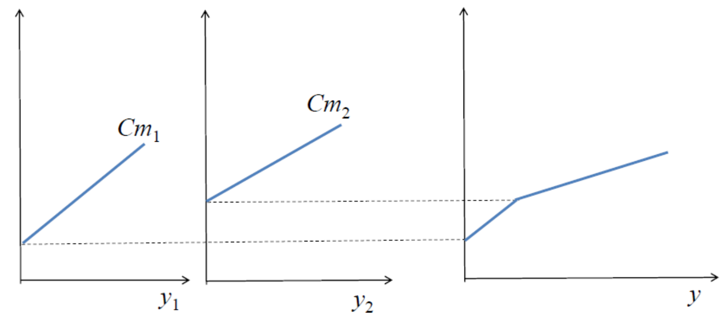
Il se peut en effet que la solution soit de ne pas produire sur l'un et/ou l'autre site. Supposons que Cm1(0) < Cm2(0)

$$0 \leq p \leq Cm_1(0) \quad \Rightarrow \quad y_1 = y_2 = 0$$

$$Cm_1(0) < p \leq Cm_2(0) \quad \Rightarrow \quad Cm_1(y_1) = p \text{ et } y_2 = 0$$

$$p > Cm_2(0) \quad \Rightarrow \quad Cm_1(y_1) = Cm_1(y_2) = p$$

Cela conduit à la courbe d'offre totale de l'entreprise qui est donnée par la somme (horizontale) des courbes de Cm



On aboutit au même résultat si on considère les deux sites comme des entreprises distinctes :

$$Max_{y_1 \geq 0}\ \Pi(y_1) = py_1 - C_1(y_1)$$

$$Max_{y_2 \geq 0}\ \Pi(y_2) = py_2 - C_2(y_2)$$

Elles vont en effet égaliser prix et coût marginal. Donc, les coûts marginaux seront égaux

V. Comparaison consommateur - producteur

Consommateur	**Producteur**
<u>Courbe d'indifférence</u> : Courbe d'iso-utilité, d'iso préférence	<u>Isoquante</u> : Courbe d'iso-production
<u>Droite budgétaire</u> : $R = p_1x_1 + p_2x_2$	<u>Droite d'iso-dépense</u> : $C = w_1x_1 + w_2x_2$
<u>Fonction d'utilité</u> : Associe une utilité à chaque combinaison de biens	<u>Fonction de production</u> : Associe une production à chaque combinaison d'inputs
<u>Fonction de demande</u> : Choix en fonction de contraintes que sont les prix des biens et le revenu	<u>Fonction de coût</u> : Choix en fonction de contraintes que sont les prix des inputs et la dépense totale

Partie 2 : Maniquet

Chapitre 1 : Economie industrielle

I. Introduction

- Définition : **L'économie industrielle** est l'étude de l'organisation des firmes, de la concurrence des firmes et de la structure des marchés qui en résulte

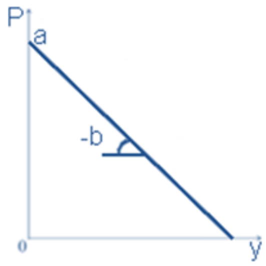
- Triple point de vue :
  - Comprendre
  - Conseiller la firme (lié à un intérêt privé)
  - Conseiller le régulateur (le gouvernement, lié à un intérêt collectif)

- La firme :
  - produit une quantité **y**
  - à un coût total[10] **$C(y)$**
  - vend sa production à un prix **p**
  - chercher à max son profit **$\pi = py - C(y)$** (recettes – coûts) → pas d'invendu

- Le marché :
  - on considère un bien homogène[11], un produit
  - plusieurs firmes (duopole si deux firmes, oligopole si plus)
  - production totale : **Y**
  - une demande : **Y** et **p** varient en sens opposé

- Hypothèses simplificatrices :
  - Coût marginal constant : $C(y) = cy$
  - Demande linéaire : $p(Y) = a - bY,\ a>c$
    - a = le max que les consommateurs sont prêts à payer
    - b = élasticité de la demande
    - c = coût marginal de production

[10] C(y), p(Y),… ne représentent pas des multiplications mais bien que C,p,… dépendent de ce qui est ( )
[11] Un bien est homogène lorsque les consommateurs sont indifférents entre acheter ce bien chez X ou Y. Ce n'est évidemment pas le cas de beaucoup de bien. Par exemple: les gens ont une préférence entre acheter une Corsa ou une Clio mais en gros, le bien est homogène.



II. Concurrence à la Cournot et concurrence à la Bertrand

1) Concurrence à la Cournot = Concurrence sur les quantités (section 27.5)

A. *Définition et remarques*

- Définition : On dit que des firmes se font concurrence à la Cournot lorsqu'elles **fixent** simultanément **les quantités** qu'elles souhaitent vendre et que le prix d'équilibre est celui qui permet l'égalité entre offre et demande
  - La décision essentielle de la firme est donc la quantité à mettre sur le marché
  - Ex : marché automobile, marché pétrolier,…

- Remarques :
  1. (Cournot est un économiste français du XIXe siècle redécouvert dans les années 1970)
  2. Les firmes n'observent les quantités des autres firmes qu'après coup
     - Au moment de la décision, Opel ne sait pas combien de Clio seront mises sur le marché
  3. La décision de base est la **capacité de production** qui va déterminer les quantités mises sur le marché (qui vont déterminer le prix)
     - Dans le cadre d'une compagnie aérienne : on ne décide pas d'abord le nombre de tickets
  4. Les firmes ne choisissent pas les prix
     - Le « choix » des prix dépend du choix des quantités
     - Ce n'est pas pour autant qu'on oublie que le prix est posté par les vendeurs

B. *Duopole*

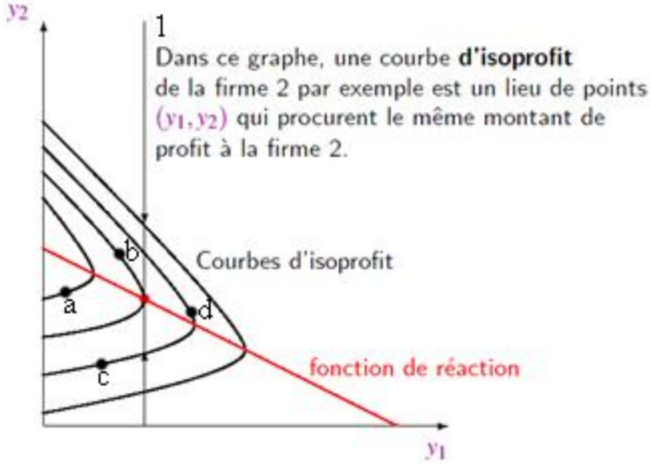
- Données : c_1 (coût marginal constant de la firme 1), c_2 (idem firme 2), $Y = y_1 + y_2$
- Quantité optimale de production de la firme 2 :
  - incertitude sur y_1 (mais pas sur c_1)
  - anticipe $y_1 = y_{1e}$ (y_1 espéré)
  - choisit y_2 pour maximiser

$$\max_{y_2} \pi_2 = p(y_1^e + y_2)y_2 - c_2y_2$$
$$\max_{y_2} \pi_2 = (a - b(y_1^e + y_2))\, y_2 - c_2y_2$$
$$\max_{y_2} \pi_2 = ay_2 - by_2^2 - by_1^e y_2 - c_2y_2$$

- La valeur optimale d'y_2 annule la dérivée de π_2

$$y_2 = \frac{a - by_1^e - c_2}{2b}$$

- <u>Cette relation est la **fonction de réaction** de la firme 2</u> : $y_2 = f(y_{1e})$
  - C'est une fonction linéaire et décroissante
  - Elle illustre les interactions stratégiques entre les firmes
  - On constate que la production de la firme 2 diminue lorsqu'y_{1e} ou c_2 augmente



  - La droite 1 est la production espérée de la firme 1 : il y a deux forces sur cette droite
    - Quand je produis → je fais du profit (tant que $p > c$)
    - La quantité que je mets sur le marché influence le prix
    - → ces deux forces définissent un choix optimal
  - La bonne firme va choisir « le bon point »
  - Indépendamment de ça, examinons le profit pour plusieurs points :
    - $a > b > c = d$
    - En effet, plus on se trouve sur une courbe de profit à gauche, plus celui-ci est élevé

- <u>Quel sera l'équilibre sur le marché</u> : y^*_1 et y^*_2 ?
  - <u>Etape 1</u> : les deux firmes ne se trompent pas (donc $y_1 = y_{1e}$ et $y_2 = y_{2e}$)

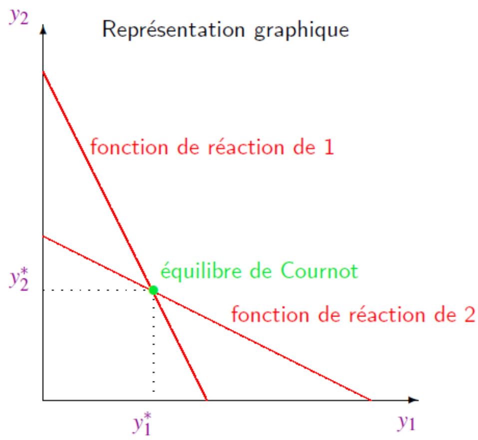
$$y_1^* = \frac{a - by_2^* - c_1}{2b}$$
$$y_2^* = \frac{a - by_1^* - c_2}{2b}$$

- En annulant les dérivées de chaque équation, on obtient :

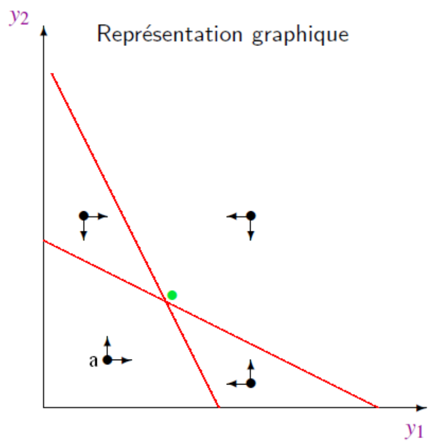
$$y_1^* = \frac{a - 2c_1 + c_2}{3b}$$

$$y_2^* = \frac{a - 2c_2 + c_1}{3b}$$

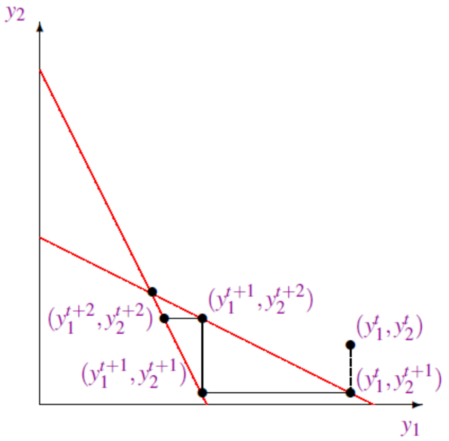
- Que remarque-t-on ? La quantité produite par la firme 1 ↑ si :
  - a ↑
  - c_2 ↑ (handicap pour la firme concurrente)
  - c_1 ↓
  - b ↓ (l'élasticité de la demande augmente)



- Etape 2 : justifions $y_1 = y_{1e}$ et $y_2 = y_{2e}$
  - Si les firmes se trompent dans leurs anticipations: Elles sont obligées de les revoir. Leurs stratégies doivent donc **converger** vers l'équilibre. L'équilibre de Cournot est stable
  - Si les firmes sont rationnelles : elles sont capables d'anticiper ce processus de convergence et de calculer directement leurs quantités d'équilibre



- Avoir un équilibre au point a n'est pas rationnel. Adoptons le point de vue de la firme 1
    - Si jamais la firme 2 choisit de produire cette quantité, j'ai intérêt à produire plus
    - La firme 2 va effectuer un raisonnement analogue



- On peut également voir ceci autrement. Partons d'une situation au temps t où les deux firmes se trompent[12]
    - La firme 2 va corriger sa stratégie
    - La firme 1 va corriger sa stratégie
    - La firme 2 va corriger sa stratégie
    - … jusqu'au point d'intersection

- Analyse de l'équilibre :
    1. Les deux firmes produisent des quantités strictement positives **même la moins efficiente** (celle dont le c est le plus élevé)
    2. Le prix : $p = a - b\,(y^*_1 + y^*_2)$ donne ici

$$p = \frac{a+c_1+c_2}{3}$$

        - C'est donc la moyenne arithmétique de a, c_1 et c_2
        - $p > c_1, c_2$ → il y a **moins** de production que ce qui est **socialement désirable**
            - Qu'est-ce que cela signifie ? Si $p=10 > c_1=5,\ c_2 = 6$
            - Un consommateur prêt à payer 7 € pour le bien ne l'achètera pas. Or, il est désirable pour la société de combler sa demande (satisfaction = 7 > coût = 5, 6).
    3. Les deux firmes ont un **profit positif**
    4. Si $c_1 = c_2 = c$

$$Y = \frac{2(a-c)}{3b}$$ [13]

[12] En faisant l'hypothèse que les firmes ont la possibilité d'effectuer plusieurs raisonnements
[13] Obtenu en additionnant les productions d'équilibre y^*_1 et y^*_2 et en égalant c_1 et $c_2 = c$

- Application : a = 10 | b = 1 | c1 = c2 = 0. Quelle firme est la mieux gérée ?

y_1	y_2	p	π_1	π_2
30	30	60	1800	1800
30	40	50	1500	2000
30	**60**	**30**	**900**	**1800**
40	30	50	2000	1500
40	40	40	1600	1600
40	60	20	800	1200
60	30	30	1800	900
60	40	20	1200	800
60	60	0	0	0

- A partir de la situation en gras, chaque firme n'a droit qu'à une décision
- La firme 1 ne peut pas faire mieux (en produisant 40, elle fait un profit de 800 et en produisant 60, elle ne fait aucun profit). Par contre, la firme 2 peut faire mieux (en produisant 40, elle fait un profit de 2000)

C. Oligopole

- Chaque firme i ϵ {1,...,n} maximise

$$\pi_i = p(Y)y_i - c_i y_i = p(y_1 + \ldots + y_i + \ldots + y_n)y_i - c_i y_i$$

A l'**optimum de la firme** on a donc

$$p(Y) + \frac{dp}{dY}y_i = c_i$$

$$p(Y)\left(1 + \frac{dp}{dY}\frac{y_i}{p(Y)}\right) = c_i$$

$$p(Y)\left(1 + \frac{dp}{dY}\frac{Y}{p(Y)}\frac{y_i}{Y}\right) = c_i$$ [14]

- Par définition, l'**élasticité de la demande**[15] vaut

[14] La dérivée partielle vient du fait qu'on doit dériver $p(y+\ldots+y_i+\ldots+y_n)y_i$ qui est une composée de fonctions

[15] Rapport entre la variation relative de la demande d'un bien et la variation relative du prix de ce bien

$$|\varepsilon(Y)| = -\frac{dY}{dp}\frac{p(Y)}{Y} = -\frac{\frac{dY}{Y}}{\frac{dp}{p(Y)}}$$

- La **part de marché de la firme** i ϵ {1,…,n} vaut

$$s_i = \frac{y_i}{Y}$$

- **A l'optimum**, on a donc :

$$p(Y)\left(1 - \frac{s_i}{|\varepsilon(Y)|}\right) = c_i$$

D. Marche à suivre pour résoudre les exercices

- On calcule les fonctions de réaction R1 et R2
    - Elles résultent du calcul de maximisation du profit : $y_1 = p(y_1+y_2)y_1 - C_1(y_1)$
- On peut obtenir les quantités d'équilibre (système de deux équations à deux inconnues)

2) Concurrence à la Bertrand (section 27.9)

- Définition : On dit que des firmes se font concurrence à la Bertrand lorsqu'elles **fixent** simultanément **les prix** auxquels elles souhaitent vendre et que les quantités d'équilibre sont celles qui permettent l'égalité entre offre et demande
    - La décision essentielle de la firme est donc le prix

- Remarques :
    1. (Bertrand est un économiste français du XIXe siècle redécouvert dans les années 1970)
    2. Les stratégies (dans le cas d'un duopole) : p_1 et p_2
    3. Hypothèse : les capacités de production s'ajustent aux quantités demandées
        - Par exemple : livraison par commande (quoiqu'on pourrait dire que les capacités ne sont pas illimitées mais en gros l'hypothèse est remplie)
        - Dès qu'il y a des contraintes de capacité de production, on est plus dans ce cas là

- Analyse :
  1. Les **consommateurs** n'achètent qu'auprès de la firme proposant le prix le plus bas (prix d'équilibre du marché $= \min \{p_1,p_2\}$
  2. En proposant un **prix juste inférieur** à celui du concurrent, la firme attire toute la demande et augmente son profit
  3. La concurrence pousse le prix du marché **à la baisse**
  4. La concurrence s'achève dès que le prix atteint le **coût marginal** d'une firme
  5. Si $c_1 < c_2 \rightarrow$ seule la firme 1, **la plus efficiente**, va produire une quantité strictement positive. Le prix sera $p = c_2$
     - La situation où la firme 2 (qui a le c le plus grand produit sans profit n'est pas une situation d'équilibre car la firme 1 peut légèrement baisser et la firme 2 ne pourrait plus suivre.
  6. Si $c_1 = c_2 \rightarrow$ le prix est égal au coût marginal du secteur : la quantité offerte est la même qu'en **concurrence parfaite**
  7. Si $c_1 = c_2 \rightarrow$ les deux firmes ont un **profit nul**
  8. Si $p(Y) = a - bY$ et $c_1 = c_2 = c$, alors :

$$Y = \frac{a-c}{b}$$

3) Comparaison entre Cournot et Bertrand

- Cournot : poids pour la société, toute la demande n'est pas satisfaite
  - Si la capacité de production est difficile à changer
- Bertrand : socialement désirable
  - Si la capacité de production s'ajustent facilement (peu de capital fixe)
- Jamais tout à fait l'un ou l'autre, souvent mixte.

III. Concurrence à la Stackelberg (section 27.2)

1) Définition et remarques

- Définition : On dit que des firmes se font concurrence à la Stackelberg lorsque l'un d'elles, le **leader** fixe la quantité qu'il veut vendre, et, ensuite l'autre firme (le **suiveur**), fixe à son tour la quantité qu'elle veut vendre. Le prix est celui qui égalise l'offre et la demande
  - Le consommateur va toujours d'abord voir chez le leader
  - Ex : marché automobile, marché pétrolier,…

- Remarques :
  1. (Stackelberg est un économiste allemand du XXe siècle)
  2. Les stratégies : y_1 et y_2 (les stratégies sont basées sur les quantités)

3. Le suiveur, disons 2, observe y_1 et fixe y_2 pour maximiser son profit
   - Il n'y a donc aucune anticipation pour la firme 2
4. Le prix : $p(Y) = p(y_1 + y_2)$
5. Le leader anticipe le comportement du suiveur
6. Est-ce meilleur ou moins bon pour la société que la concurrence à la Cournot

2) Comportement du leader et du suiveur

- Le suiveur : fixe y_2 optimalement en fonction d'y_1 [16]:

$$y_2 = \frac{a - by_1 - c_2}{2b}$$

- Le leader :
  1. maximise

$$\pi_1 = p(y_1 + y_2)y_1 - c_1y_1$$

  2. en sachant que

$$y_2 = \frac{a - by_1 - c_2}{2b}$$

  3. c'est-à-dire qu'il maximise

$$\begin{aligned}\pi_1 &= p\left(y_1 + \frac{a - by_1 - c_2}{2b}\right)y_1 - c_1y_1 \\ &= \left(a - b\left(y_1 + \frac{a - by_1 - c_2}{2b}\right) - c_1\right)y_1 \\ &= \left(\frac{a}{2} - \frac{by_1}{2} + \frac{c_2}{2} - c_1\right)y_1,\end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$y_1 = \frac{a + c_2 - 2c_1}{2b}$$

Par conséquent,

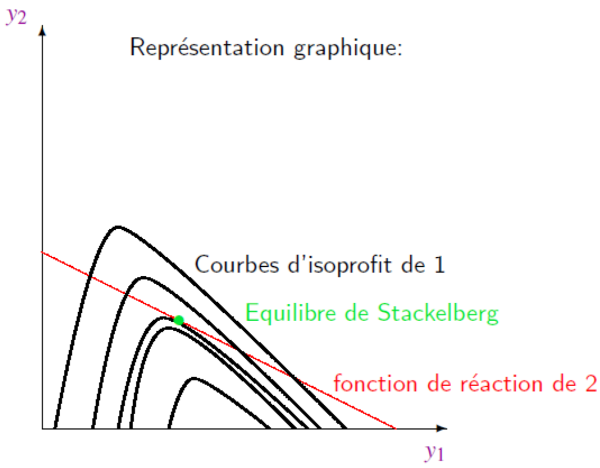
$$y_2 = \frac{a + 2c_1 - 3c_2}{4b}$$

- Dans le cas simple où $c1 = c2 = c$:

[16] Raisonnement analogue à la concurrence à la Cournot. A part que y1 est constaté, observé et plus espéré

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \frac{a-c}{2b}, \\
y_2 &= \frac{a-c}{4b}, \\
Y &= \frac{3(a-c)}{4b},
\end{aligned}
$$

- <u>Ce qui veut dire que</u> :
    1. Le **leader vend plus** que les duopoleurs à la Cournot
    2. Le **suiveur vend moins**
    3. La **quantité** totale est, elle, **supérieure** (et donc le prix est inférieur) : c'est meilleur pour la société[17]



    - La fonction de réaction de la firme 2 (suiveur) ne change pas (par rapport à Cournot)
    - La firme 1 sait très bien que le point d'équilibre se trouvera sur la fonction de réaction de la firme 2. Elle choisit donc le point de tangence entre la fonction de réaction de la firme 2 et une courbe d'isoprofit de la firme 1

3) Marche à suivre pour résoudre les exercices

- On calcule les fonctions de réaction R1 (suiveur) et R2 (leader)
    - Le suiveur : $y_1 = p(y_1+y_2)y_1 - C_1(y_1)$ (donc idem Cournot)
    - Le leader : détermine Ytotal et le P du marché
        - On calcule Y et P(Y)… Qui ne dépendent que d'y_2 puisqu'on connait y_1 (et qui lui-même dépend d'y_1)
        - $y_2 = p(y_1+y_2)y_2 - C_2(y_2)$
        - On obtient donc la quantité du leader

[17] La concurrence à la Stackelberg est souvent mieux que la concurrence à la Cournot mais pas toujours !

- On peut donc obtenir la quantité du suiveur

IV. Le cartel (section 27.10,11)

1) Définition et analyse

- Définition : On dit que des firmes se mettent en cartel lorsqu'elles forment une **coalition** de façon à se comporter comme un **monopole** et à maximiser la **somme** de leurs **profits**

- Analyse : les firmes 1 et 2 coopèrent pour fixer **Y = y1 + y2** et agissent donc comme un monopoleur

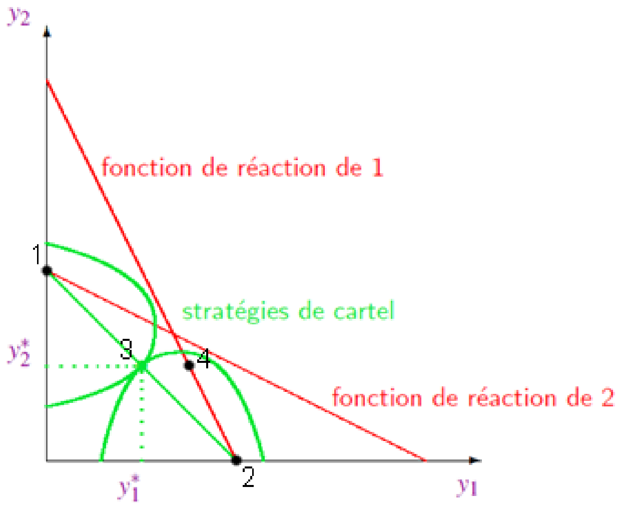
$$\max_Y \pi_1 + \pi_2 = p(Y)Y - cY,$$
$$= (a - bY)Y - cY$$

Ce qui donne :

$$Y^* = \frac{a-c}{2b}$$

  - La **quantité** échangée sur le marché est **moindre** que s'il y a **concurrence**, quelle que soit la forme de concurrence. C'est la moitié de la quantité socialement désirable[18]
  - Si $c_1 \neq c_2$: seule la firme la plus efficiente devrait produire, si elles veulent maximiser leur profit. C'est pratiquement impossible. En effet, si la production se trouve seulement chez la firme 1 et qu'elle verse une somme à la firme 2, le cartel sera vite grillé.
  - Si $c_1 = c_2$: le cartel est-il **tenable** ? Est-il **stable** ? Les cartels étant interdits (au niveau national), l'entreprise ne peut pas recourir à un juge si l'autre ne respecte pas le cartel. Le cartel va-t-il donc se maintenir **par lui-même** ?

[18] L'amende sera d'ailleurs égale à ce qui a été perdu pour la société



- 1 et 2 sont les quantités de monopole (qui sont égales car $c_1 = c_2$). Les entreprises vont donc choisir n'importe quel point sur la **droite verte** : 3 par exemple.
- Si la firme 1 pense que la firme 2 va être honnête, il vaut mieux qu'elle **produise plus** et maximise son profit (en 4)

D'après ce graphique, on remarque que le cartel n'est PAS stable

- Or, il y a des cartels. C'est parce que dans le graphe précédent, on a fait l'hypothèse que Y_1 et Y_2 sont déterminés une fois pour toute

2) Mécanismes de contrôle

A. Cournot pour toujours !

- La firme retournera en Cournot pour toujours si la firme partenaire la trompe

- Soit :
  - π_d : le profit lors de la période de déviation, le mieux que la firme puisse espérer
  - π_m : le profit par période dans le cartel, c'est-à-dire le profit de monopole divisé par deux
  - π_c : le profit après la punition
  - Donc : $\pi_d > \pi_m > \pi_c$
- <u>Le profit **dans** le cartel (soit r le taux d'intérêt)</u> :

$$\pi_m + \frac{\pi_m}{1+r} + \frac{\pi_m}{(1+r)^2} + \ldots = \pi_m + \frac{\pi_m}{r}$$ [19]

- <u>Le profit **hors** du cartel</u> :

[19] Le résultat obtenu vient du fait qu'on a une suite géométrique. La somme de cette suite vaut le premier terme (π_m) divisé par 1 – la raison (1+r)

$$\pi_d + \frac{\pi_c}{r}$$

- Le cartel **est** stable si :

$$\pi_m + \frac{\pi_m}{r} \geq \pi_d + \frac{\pi_c}{r} \Leftrightarrow r \leq \frac{\pi_m - \pi_c}{\pi_d - \pi_m}$$

- On remarque que :
    - Si le taux d'intérêt est bas : les revenus futurs seront importants. L'accent est mis sur le profit futur.
        - L'entreprise **restera** donc dans le cartel
    - Si le taux d'intérêt est haut : les revenus futurs seront moins importants. L'accent est mis sur le profit présent
        - L'entreprise **quittera** donc le cartel

- D'où vient ce taux d'intérêt ? Il vient du fait qu'on considère plusieurs périodes et qu'il faut donc actualiser les profits. Les périodes sont définies par la **périodicité des décisions.**
    - Si la périodicité est importante : Il y a peu d'interactions. Les taux d'intérêts sont vus sur le long terme et donc élevés. Il y a donc **peu de risque** de cartel.
    - Si la périodicité est faible : Il y a beaucoup d'interactions. Les taux d'intérêts sont vus sur le court terme et donc faibles. Il y a **risque** de cartel.

B. *Autres formes de punition*

- Le contrôle des prix : l'entreprise délègue le **contrôle au consommateur**
    - L'entreprise veut vérifier que le prix de son partenaire est bien celui d'équilibre en monopole (si les prix sont plus faibles c'est que le partenaire produit plus qu'il ne devrait)
    - « Si vous trouvez moins cher ailleurs, on vous rembourse la différence »
        - Soit on est dans un cas de concurrence à la Bertrand
        - Soit on est dans un cas où un membre d'un cartel tente de contrôler la fidélité de son partenaire
- La limitation volontaire des quantités : l'entreprise délègue le **contrôle à l'Etat**
    - L'Etat américain voulait lutter contre l'invasion des voitures japonaises sur le marché américain
    - Les producteurs japonais ont pris les devants en annonçant qu'ils garantissaient chacun de limiter leur production.
    - En soi, cette déclaration revient à déclarer un cartel entre les firmes japonaises
    - La supervision du respect de ces limites était effectuée par l'Etat américain

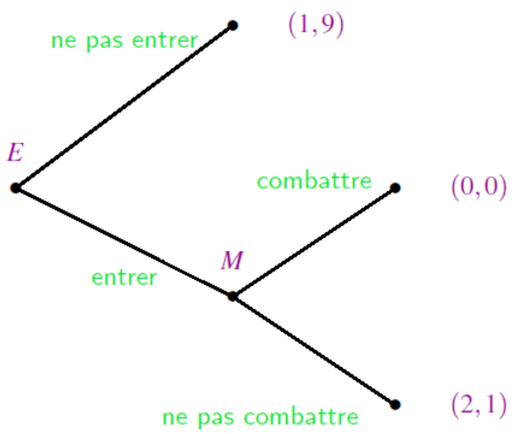
- Au final : un emploi gardé dans l'industrie automobile aux USA a coûté 160.000$ en 1 an. Il aurait mieux valu instaurer une taxe

V. L'entrée sur le marché (section 28.8)

- Principe : Même **seule** sur son marché, une firme peut être en situation de **concurrence**, si d'autres firmes **menacent d'entrer** sur le marché. Quand est-il possible pour une firme d'empêcher les autres d'entrer ?

A. Augmentation des capacités de production à l'entrée de E

- Exemple :
  - La firme M est seule sur le marché et réalise un profit de 9
  - La firme E envisage d'entrer. Hors du marché, elle réalise un profit de 1.
  - Si M combat (en augmentant sa production), E aura un profit de 0 tandis que si M ne combat pas, E aura un profit de 2
  - Si E entre, le profit de M sera de 0 si elle combat, et de 1 si elle ne combat pas



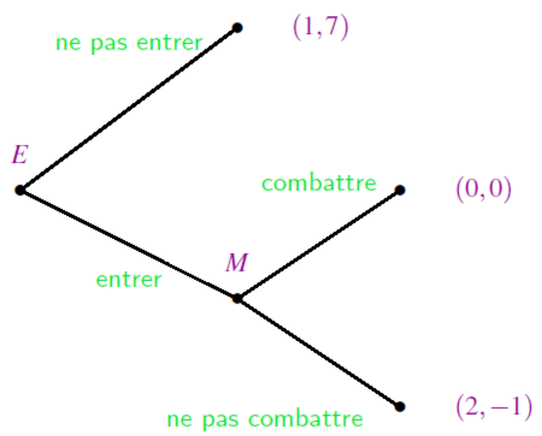
  - Point de vue de E :
    - Meilleure solution : entrer et faire face à un concurrent non agressif
    - Pire solution : entrer et faire face à un concurrent agressif
  - Point de vue de M :
    - Meilleure solution : rester seul
    - Pire solution : combattre

- Analyse : la firme M a-t-elle les moyens de menacer la firme E ? **NON**
    - Une fois que E est entré, il n'est pas dans l'intérêt de M de combattre
    - La firme E l'anticipe et décide donc d'entrer
    - La menace n'est donc **pas crédible**

- En conclusion : la possibilité d'être agressive n'est pas une raison suffisante pour craindre qu'une firme empêche d'autres d'entrer sur son marché.

B. Augmentation des capacités de production avant l'entrée de E

- Exemple : idem à part que M peut augmenter ses capacités de production, à un coût de 2, avant que E décide d'entrer ou non, de sorte que son éventuel combat futur ne lui coûte rien.



- Analyse : la firme M a-t-elle les moyens de menacer la firme E ? **OUI**
    - Une fois que E est entré, il est dans l'intérêt de M de combattre
    - La firme E l'anticipe et décide donc de ne pas entrer
    - La menace est donc **crédible**
    - Pour un coût de 2, M a préservé son monopole

- En conclusion : une capacité de production excédentaire peut être le signe d'une volonté agressive à l'égard des entrants potentiels. Le régulateur doit donc en tenir compte

VI. Conclusion

- La situation de cartel est la pire pour la société, la concurrence à la Bertrand est la meilleure, puisqu'elle est équivalente à la concurrence parfaite
- Quand la concurrence se fait en quantité, même les firmes inefficientes peuvent survivre

- Quand la concurrence se fait en quantité, plus le nombre de firmes est grand, plus on se rapproche de l'équilibre concurrentiel
- Tout cartel est instable
- Les firmes interagissent même avec d'autres firmes qui ne sont pas sur leur marché.
- Nous n'avons pas étudié : les biens hétérogènes, l'incertitude sur les coûts ni sur la demande.

	Cournot	Bertrand	Stackelberg	Cartel
Concurrence sur …	Les quantités	Les prix	Les quantités (mais leader)	Pas de concurrence
Quantité produite	$Y = \frac{2(a-c)}{3b}$	$Y = \frac{a-c}{b}$	$Y = \frac{3(a-c)}{4b}$	$Y = \frac{a-c}{2b}$
Classement en désirabilité sociale	3	1	2	4
Résolution des exercices	Chaque firme max son profit en anticipant la quantité de l'autre firme	Chaque firme calque son prix à son coût marginal	Le suiveur max son profit comme en Cournot. Le leader fixe prix et quantités pour max son profit	Maximisation du profit joint

Chapitre 2 : Théorie des jeux

I. Introduction

1) Définition générale

La théorie des jeux est un outil d'analyse des interactions stratégiques entre agents rationnels
- Agents rationnels : ils maximisent une certaine fonction d'utilité (donc ils maximisent l'espérance de l'utilité)
- Interactions stratégiques : on s'intéresse aux interactions entre les manières de jouer un jeu

2) Jeux statiques et jeux dynamiques

A. Jeux statiques

- Définition : chaque joueur joue une fois

- Caractéristiques : un jeu statique spécifie :
    1. La liste de **joueurs**
    2. La liste des **actions possibles** pour chaque joueur
    3. La matrice des « **paiements** », c'est-à-dire ce que chaque joueur « gagne » en fonction des choix de tous les joueurs. Le paiement est une utilité et dans le cas d'une entreprise, c'est un profit

- Exemple : concurrence à la Cournot, concurrence à la Bertrand

- La stratégie : est une manière de joueur un jeu. Ici, la stratégie correspond au choix d'une action

B. Jeux dynamiques

- Définition : les joueurs jouent à des moments différents et certains joueurs ont des infos sur les choix passés d'autres joueurs

- Caractéristiques : un jeu dynamique spécifie :
    1. La liste de **joueurs**
    2. L'arbre du jeu, son « timing », sa forme extensive
    3. La liste des **actions possibles** pour chaque joueur, à chaque moment du jeu où il doit choisir une action
    4. La matrice des « **paiements** », c'est-à-dire ce que chaque joueur « gagne » en fonction des choix de tous les joueurs, quand le jeu est terminé. On ne s'intéresse donc qu'au **total** de ce qu'il a gagné

- Exemple : concurrence à la Stackelberg, jeu d'entrée, jeu de Cournot répété (cartel)

- La stratégie : spécifie un choix d'action, dès que ce joueur a un choix à faire. Dans le cas d'une concurrence à la Stackelberg :
    - Le leader fixe une quantité librement
    - Le suiveur fixe une quantité qui dépend de la quantité que le leader a choisie

3) Objectif de l'analyse des jeux

- Prédire le comportement des joueurs et donc le résultat du jeu.

- Remarques :
    1. Théorie due à von Neumann et Morgenstern

2. « **Théorie des conflits** » plutôt que « théorie des jeux » (qui est source de malentendus)
3. Économie, sciences po, biologie
4. Paiement = **utilité espérée** (pas forcément des euros)

II. Stratégies dominantes et dilemme du prisonnier (28.1)

1) Les stratégies dominantes

- <u>Définition</u> : Une **stratégie dominante** donne à un joueur un paiement strictement supérieur aux paiements qu'il obtiendrait en jouant une autre stratégie, quelle que soit la stratégie choisie par les autres.

- Dans ce cas-là, il est donc facile de prédire le résultat

- Si une des stratégies disponibles à un joueur est strictement dominante, il choisira cette stratégie

		Colonne			
		Gauche		Droite	
Ligne	Haut	1	2	0	1
	Bas	2	1	1	0

- Dans cet exemple :
  - Ligne choisira Bas car dans tous les cas, c'est la meilleure solution
  - Colonne choisira Gauche car dans tous les cas, c'est la meilleure solution

2) Le dilemme du prisonnier

		Colonne			
		Avouer		Nier	
Ligne	Avouer	-3	-3	0	-6
	Nier	-6	0	-1	-1

- L'équilibre est : les deux avouent alors que si les deux nient, cela fournit un meilleur paiement aux deux joueurs.
- Il y a un conflit entre **rationalité individuelle** et rationalité **collective**

- <u>Autre exemple</u> : qui veut payer ses impôts ?

		Colonne			
		Payer		Ne pas payer	
Ligne	Payer	3	3	1	4
	Ne pas payer	4	1	2	2

- Il est collectivement rationnel de ne pas laisser la liberté à chacun de payer ou non ses impôts

- Plus généralement :

		Colonne			
		Coopérer		Ne pas coopérer	
Ligne	Coopérer	3	3	1	4
	Ne pas coopérer	4	1	2	2

- Comment expliquer que des gens coopèrent ?
  - Ils aiment coopérer (loyauté, honnêteté) : NON. Cela se traduirait par le fait qu'il y a plus d'utilité à coopérer qu'à ne pas coopérer. Or, la matrice ne correspond pas à ça
  - **Le jeu est répété**
- Exemple : pollution, déficit budgétaire dans l'UE (retirer la possibilité aux Etats de choisir leur déficit)

- Jeu de coopération répété (jeu séquentiel)
  - Nombre fini de répétitions : **pas de coopération** :
    - Lors de la dernière période, plus personne n'aura intérêt à coopérer. Sachant cela, lors de l'avant dernière période, plus personne n'aura intérêt à coopérer,…
    - …
  - Nombre infini de répétitions (ou incertitude sur la fin) : **multitude d'équilibres**
  - Une stratégie particulière : un prêté pour un rendu.
    - 1re période : coopération
    - 2e période : coopération si coopération et pas de coopération si pas de coopération
    - En moyenne et empiriquement, c'est la stratégie donnant le gain le plus important. Il y a moyen de faire mieux mais en moyenne, c'est la **meilleure stratégie**
    - Souvent utilisé dans le monde de l'industrie
    - Si les deux firmes utilisent cette stratégie, elles coopéreront pour toujours

- Le cartel est un dilemme du prisonnier répété. Le prêté pour un rendu est souvent la solution préférée

III. Meilleure réponse – Equilibre de Nash (28.2 et 29.1)

1) Fonction de meilleure réponse

- Constat : Les jeux avec un équilibre en stratégies dominantes sont très rares. Le choix de la stratégie optimale dépend souvent de ce que font les autres joueurs

- Définition : La fonction de meilleure réponse d'un joueur est la fonction qui identifie la stratégie qui amène le meilleur paiement **en fonction de** la stratégie des autres joueurs

2) Définition

Un équilibre de Nash est une liste de stratégies, une par joueur
- À **l'intersection** des fonctions de meilleure réponse
- Telles qu'aucun joueur n'a intérêt à **dévier** unilatéralement
- Telles que si tous les joueurs pensent que les autres vont se comporter selon ces stratégies, c'est comme ça que les choix seront faits (**anticipations auto-justificatrices**)

3) Exemples

- Exemple 1 : un jeu simple

		Colonne			
		Gauche		Droite	
Ligne	Haut	2	1	0	0
	Bas	0	0	1	2

- On peut voir cela par les trois façons
  - Si colonne joue gauche, ligne joue haut. Si colonne joue droite, ligne joue bas. C'est la fonction de meilleure réponse de ligne. Il y a deux intersections : haut-gauche et bas-droite. Ce sont deux équilibres de Nash
  - En aucun des deux points, il y a un intérêt à dévier unilatéralement

- Les anticipations sont auto-justificatrices

- Exemple 2 : la bataille des sexes

		Elle			
		Opéra		Football	
Lui	Opéra	2	1	0	0
	Football	0	0	1	2

  - Il est probable qu'ils soient tous les deux soit à l'opéra, soit au foot
  - Mais, est-il possible qu'un soit à l'opéra et l'autre au foot ?

- Exemple 3 : la course aux armements

		URSS			
		Ne pas construire		Construire	
USA	Ne pas construire	4	4	1	3
	Construire	3	1	2	2

  - Si l'histoire amène les deux Etats à construire
  - Ils voient qu'il est plus avantageux de passer à l'autre équilibre
  - On peut voir les accords de la fin de la guerre froide comme le passage d'un équilibre de Nash à un autre
  - Ce changement ne doit pas être unilatéral (sinon, celui qui ne construit pas se fait avoir)
  - Il faut donc ouvrir le **contrôle** aux enquêteurs de chaque nation pour veiller au respect des mesures
  - Cela nécessite qu'il y ait au moins un petit avantage à ne pas construire si l'autre ne construit pas
    - Si le 3 est remplacé par $4 + \varepsilon$, il n'y a pas d'intérêt à ne pas construire
    - Si le 3 est remplacé par $4 - \varepsilon$, il y a intérêt à ne pas construire

- Exemple 4 : la poule mouillée

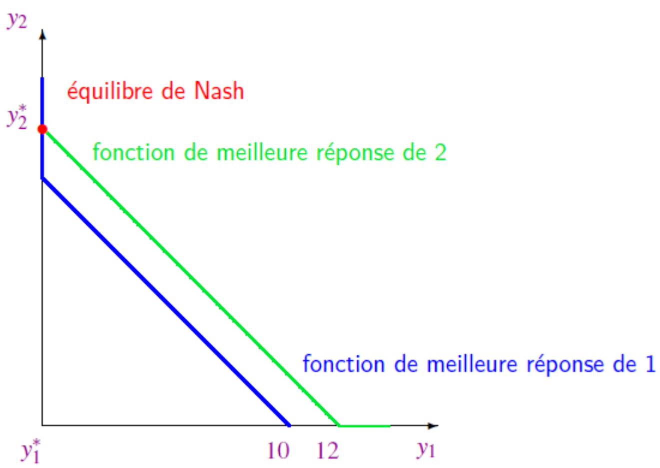
		Colonne			
		Faire un écart		Droit devant	
Ligne	Faire un écart	0	0	-1	1
	Droit devant	1	-1	-2	-2

- Deux équilibres de Nash : écart-droit et droit-écart
- Mais n'y a-t-il pas d'autres possibilités ?

- <u>Exemple 6</u> : jeu « un peu plus compliqué »

		C		
		G	C	D
L	H	4/3	1/4	0/2
	M	1/1	0/2	3/0
	B	2/2	0/0	3/1

- <u>Exemple 5</u> : la contribution volontaire au pot commun
  - 2 joueurs
  - Chaque joueur choisit une quantité y_i
  - Chaque joueur souhaite que la quantité totale $(y_1 + y_2)$, soit égale à a_i
  - Si le joueur i voit que l'autre a mis x dans le pot commun, il souhaitera y mettre $a_i - x$
  - Supposez qu'$a_1 = 10$, $a_2 = 12$, $y_1 = 5$, $y_2 = 6$. Quelles sont les meilleures réponses ?
  - 1 devrait mettre 4 et pas 5. 2 devrait donc mettre 7 et pas 6… Le raisonnement se répète jusqu'à : 1 donne 0 et 2 donne 12, qui est un équilibre de Nash. En conclusion, seul celui qui a l'ambition la plus élevée va faire l'effort



4) Remarques

- Tout équilibre en **stratégies dominantes** est un équilibre de Nash
- Les équilibres de **Cournot** et de **Bertrand** sont des équilibres de Nash
- Plusieurs jeux étudiés ont deux équilibres de Nash. Ce sont des jeux de **coordination** : les deux joueurs doivent se coordonner sur leur choix de stratégie. On ne peut prédire correctement l'équilibre que s'il y a un **mécanisme** de coordination : discuter avant de jouer, se fier à un élément éventuellement aléatoire extérieur (si pluie : opéra, si soleil : foot) …

IV. Equilibre de Nash en stratégies mixtes (28.3, 29.4)

1) Absence d'intersection

- Dans certains jeux, les fonctions de meilleure réponse n'ont pas d'intersection

		Gardien			
		Plonger à gauche		Plonger à droite devant	
Tireur	Tirer à gauche	-1	1	1	-1
	Tirer à droite	1	-1	-1	1

Table: Le tir de pénalty

Il est donc rationnel d'être **imprévisible**

- Autre exemple : pierre, papier, ciseaux

		Colonne					
		Pierre		Papier		Ciseaux	
Ligne	Pierre	0	0	-1	1	1	-1
	Papier	1	-1	0	0	-1	1
	Ciseaux	-1	1	1	-1	0	0

Table: Pierre, Papier, Ciseaux

- Autre exemple : il y a peu de policiers dans les rues de Vienne, est-ce une bonne nouvelle ?
    - S'il y a peu de policiers, la criminalité augmente et donc le nombre de policiers doit augmenter
    - S'il y a peu de criminalité, le nombre de policier va diminuer et donc la criminalité va augmenter

- Autre exemple : la bataille des sexes

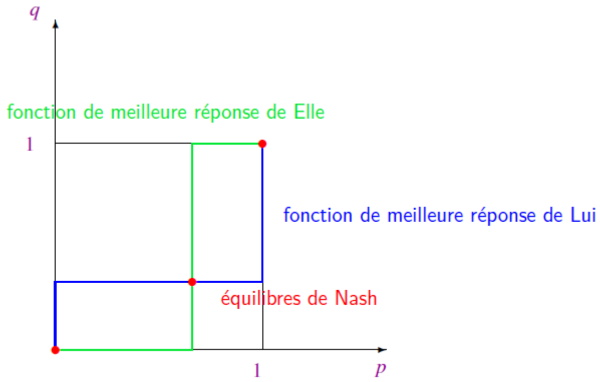
2) Stratégies mixtes

- Définition : Une **stratégie mixte** est une stratégie aléatoire çàd qu'elle attribue une probabilité à chaque choix. Jouer cette stratégie, c'est jouer ces choix sur base de ces probabilités.
    - Ca ne signifie **pas** que le joueur joue **au hasard.** Sa manière d'interagir consiste à hésiter ou à être imprévisible
    - Une stratégie mixte est **inobservable** (on peut la mesurer si un joueur joue le jeu plusieurs fois)
    - Sans aspect aléatoire, une stratégie est dite **pure** (c'est un cas spécial de stratégie mixte : 100% de proba pour une stratégie)

- Calcul d'un équilibre de Nash en stratégies mixtes :

		Elle			
		Opéra		Football	
Lui	Opéra	2	1	0	0
	Football	0	0	1	2

- Soit p, la probabilité que Lui joue Opéra, et q la probabilité que Elle joue Opéra
    - L'utilité de Lui s'il va à l'opéra vaut : $2q + 0(1\text{-}q) = 2q$
    - L'utilité de Lui s'il va au football vaut : $0q + 1(1\text{-}q) = 1\text{-}q$
        - Si $q < \frac{1}{3}$, Lui préfère aller au Football
        - Si $q > \frac{1}{3}$, Lui préfère aller à l'Opéra
        - Si $q = \frac{1}{3}$, Lui est indifférent, il hésite
    - L'utilité de Elle si elle va à l'opéra vaut : $1p + 0(1\text{-}p) = p$
    - L'utilité de Elle si elle va au football vaut : $0p + 2(1\text{-}p) = 2\text{-}2p$
        - Si $p < \frac{2}{3}$, Elle préfère aller au Football
        - Si $p > \frac{2}{3}$, Elle préfère aller à l'Opéra
        - Si $p = \frac{1}{3}$, Elle est indifférent, il hésite
- La probabilité qu'ils se rencontrent est donc de $\frac{4}{9}$
- Il n'est rationnel pour eux d'hésiter que si $p = \frac{2}{3}$ et $q = \frac{1}{3}$. C'est un équilibre de Nash en stratégies mixtes de ce jeu



- Au tir du pénalty : $p = \frac{1}{2}$ et $q = \frac{1}{2}$

- Au jeu de PPC, chaque action est choisie avec une proba $\frac{1}{3}$

- Un jeu admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes seulement si chaque joueur est **indifférent** entre joueur différentes stratégies pures, étant donné les probabilités que les autres joueurs assignent à leurs actions

- <u>Application</u> : PPC modifié

		Colonne					
		Pierre		Papier		Ciseaux	
Ligne	Pierre	0	0	-3	3	1	-1
	Papier	3	-3	0	0	-1	1
	Ciseaux	-1	1	1	-1	0	0

- 1 (pierre) : $0p_1 - 3p_2 + p_3 \to -3p_2 + (1\text{-}p_1\text{-}p_2) = 0 \to p_1 + 4p_2 = 1$
- 2 (papier) : $3p_1 + 0p_2 - p_3 \to 3p_1 - (1\text{-}p_1\text{-}p_2) = 0 \to 4p_1 + p_2 = 1$
- On tire de là que $p1 = \frac{1}{5}$, $p2 = \frac{1}{5}$ et p3 (ciseaux) $= \frac{3}{5}$

V. Jeux dynamiques (28.7, 29.6)

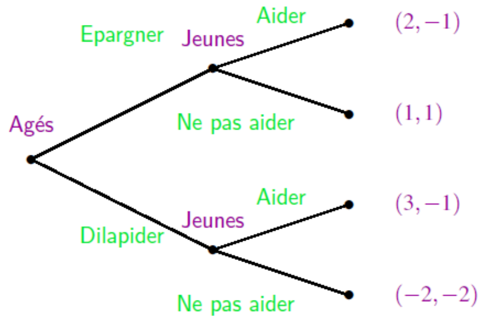
- Exemples : entrés sur le marché, jeu statique répété, PPC modifié II (supposons que Ligne joue d'abord, le jeu est fait dès le départ et Colonne gagne toujours car il s'adapte)

- La conclusion qui dit qu'il y a deux équilibres de Nash ne tient pas compte du timing

Conflit intergénérationnel I : approche statique

		Jeunes			
		Aider		Ne pas aider	
Agés	Epargner	2	-1	1	1
	Dilapider	3	-1	-2	-2

Conflit intergénérationnel II: les Agés jouent d'abord



- Les jeunes vont aider si les vieux dilapident mais n'aideront pas si les vieux épargnent. Sachant cela, les vieux vont dilapider
- Il y a donc **un seul équilibre** : dilapider et aider
- C'est un équilibre de Nash (mais pas un équilibre parfait); on dit qu'il est **parfait en sous-jeux** car chaque décision est optimale, conditionnellement à ce que le jeu atteigne ce nœud de décision
- La menace de ne pas aider après dilapider n'est pas crédible
- Le **timing est crucial.** C'est parfois un avantage (comme ici), parfois un inconvénient (PPC modifié II) de jouer le premier.

  → Tout jeu dynamique se résout en commençant par la fin et en raisonnant à rebours

VI. Conclusion

- Notions de stratégie dominante, fonction de meilleure réponse, stratégie pure, stratégie mixte, équilibre de Nash, équilibre de Nash parfait en sous-jeu
- Identification d'un équilibre de Nash en stratégies pures, en stratégies mixtes, parfait en sous-jeu
- Il peut y avoir incompatibilité entre la rationalité individuelle et la rationalité collective
- Le timing d'un jeu est crucial

Chapitre 3 : Tarification par un monopoleur

I. Introduction

- Dans une transaction où le vendeur a une certaine liberté pour fixer les conditions de l'échange (prix et quantités), il souhaite **connaitre la volonté à payer de l'acheteur** (il y a une info pertinente qui est détenue par le conso mais pas par le monopoleur. C'est un cas typique d'**asymétrie de l'info**

- Qui en **profite** ? Qu'elles sont (devraient être) les conséquences sur le comportement du vendeur ?

- Nous étudions le cas simple où le vendeur est un **monopoleur**

- Nous verrons que **l'info a de la valeur**, elle permet à certains agents de **s'approprier une partie du surplus** qu'ils ne parviendraient pas à s'approprier si l'info était complète

- L'asymétrie d'info peut également impliquer une perte de surplus total (et donc engendre un coût pour la société)

II. Présentation du modèle

1) Hypothèses

- On suppose qu'il y a **deux biens**: le bien 1, produit par le monopoleur, et le bien 2, qui représente tous les autres biens, qu'on appellera monnaie: ce bien est le numéraire, son prix est normalisé à 1 (on parle donc en euros).

- Le monopoleur :
    - **Produit** à un cout marginal constant de c
    - Propose une **tarification** F, par exemple :
        - Un prix unique quelle que soit la quantité : $F(x_1) = px_1$
        - Un abonnement, suivi d'un prix constant : $F(x_1) = F_0 + px_1$ si $x_1>0$
        - Un double prix : p pour une petite quantité et p' pour une quantité supérieur à un seuil $\underline{x_1}$
        - Une offre à prendre ou à laisser : $(x^*_1,F(x^*_1))$
        - …
    - Cherche à maximiser son **profit**

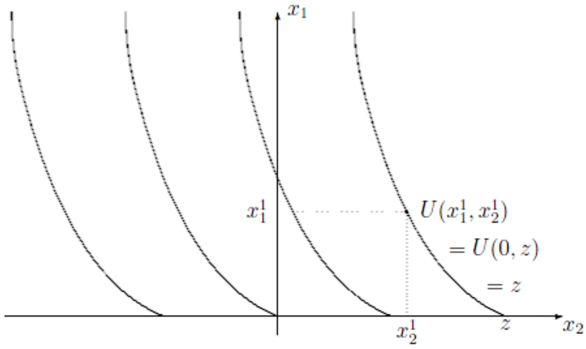
2) Fonction d'utilité et maximisation de l'utilité

- Un **consommateur** est intéressé par le bien 1 qu'il consomme en quantité x_1, et par les autres biens (la monnaie) qu'il consomme en quantité x_2

- Nous faisons l'hypothèse que sa fonction d'utilité est **quasi-linéaire** (linéaire en x_2 mais pas en x_1), çàd :

$$U(x_1,x_2) = v(x_1) + x_2$$

- L'utilité est l'utilité qu'il dérive de x_1 + la quantité de monnaie qui lui reste. Elle est mesurée en unités monétaires
- La fonction v représente le **surplus – l'utilité** que ce consommateur tire de la consommation du bien 1 : on suppose que cette fonction est :
    - croissante (la volonté à payer est toujours positive : plus il consomme, plus son utilité augmente) : $\frac{\partial v}{\partial x} > 0$
    - concave (la volonté à payer est décroissante) : $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} < 0$
    - en outre : $v(0) = 0$



Courbes d'indifférences

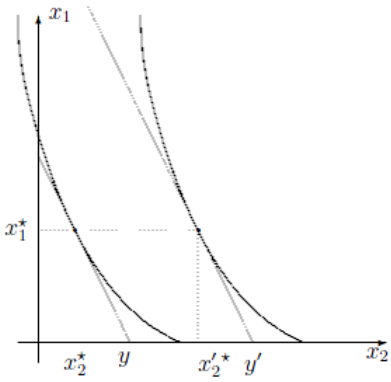
- La maximisation de l'utilité, lorsque le consommateur fait face à une tarification F, est résolue de la manière suivante : $\max_{x1,x2} U(x_1,x_2)$ s.c. $F(x_1) + x_2 \leq y$
    - La contrainte doit être liante ; le problème devient :

$$\max_{x_1} U(x_1, y - F(x_1)) = v(x_1) + y - F(x_1)$$

    - En annulant la dérivée, on obtient :

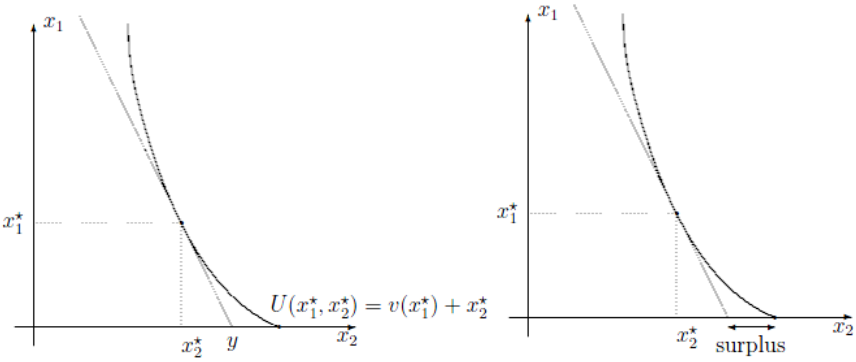
$$\frac{\partial v}{\partial x1} - \frac{\partial F}{\partial x1} = 0 \leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial x1} = \frac{\partial F}{\partial x1}$$

- **La quantité optimale de bien 1 ne dépend pas du revenu y** ! Elle dépend uniquement de v et de F. Il n'y a pas d'effet revenu. C'est une hypothèse simplificatrice. Elle revient à dire que le bien 1 est petit dans le budget de ce consommateur

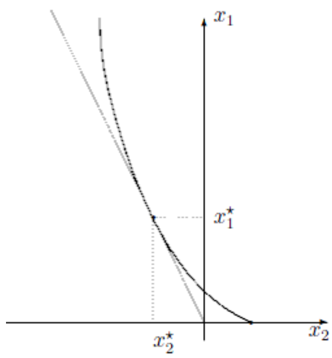


3) Surplus

- Le **surplus** du consommateur (ce qu'il gagne en bien-être dans la transaction) peut se **mesurer en monnaie.** C'est donc également une mesure de la richesse brute créée par la transaction[20]



- Etape technique : **déplacement** de l'axe x_1 : plutôt que de mesurer x_2, on va mesurer $x_2 - y$, ce qui est gagné (l'opposé de ce qui est dépensé) par le consommateur dans la transaction. Donc, un nouveau $x_2 = 0$ représente une dépense nulle, $x_2 = -1$ une dépense de 1 euro,…



[20] La richesse nette = la richesse brute – le coût de production

- Dans le graphe, le point qui représente la situation du consommateur avant la transaction devient le panier de coordonnées $(0,0)$; la représentation ne dépend plus de y. On pourra donc représenter plusieurs consommateurs dans le même graphe, même s'ils ont des revenus différents.

III. Un consommateur, un producteur et un planificateur

- Supposons qu'un planificateur **bienveillant et omniscient** décide de la quantité à produire x_1 et de la manière de répartir le surplus entre le consommateur et le producteur.

- S'il veut garantir un profit de $\bar{\pi}$ au producteur, son programme est le suivant :

$$\max_{x1,F} U(x_1,x_2) = v(x_1) - F \text{ sous la contrainte : } F - cx_1 \geq \bar{\pi}$$

  - Le Lagrangien de ce programme vaut : $L = v(x_1) - F - \lambda(\bar{\pi}\text{-}(F\text{-}cx_1))$
  - La solution : dérivons par rapport aux « vraies » variables

$$\frac{\partial L}{\partial x1} = v'(x_1) - \lambda c = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial F} = -1 + \lambda = 0$$

  - On en déduit que $\lambda > 0$ (précisément, $\lambda = 1$), ce qui prouve que la contrainte est serrée (liante). On obtient donc

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -\ (\bar{\pi} - (F\text{-}cx_1)) = 0$$

- Par conséquent, $v'(x_1^*) = c$, quel que soit le profit garanti au producteur (donc quelle que soit la manière de répartir le surplus). La quantité produite est celle qui maximise le surplus, çàd celle qui maximise $v(x_1) - cx_1$

IV. Un consommateur, un monopoleur en information complète

- Le monopoleur choisira la tarification qui maximise son profit

- Le consommateur **acceptera** la transaction tant que $U(x_1,x_2) \geq U(0,0)$, çàd $v(x_1) + x_2 \geq 0$. C'est la contrainte de participation (CP)

- Notons que $x_2 = -F$

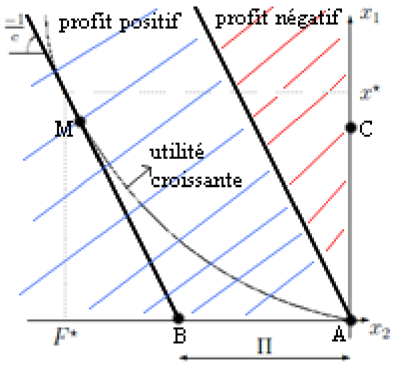
- Le programme du monopoleur: $\max_{x_1,F} F - cx_1$ sous la contrainte $v(x_1) - F \geq 0$

- Le lagrangien s'écrit $L = F - cx_1 - \lambda(F - v(x_1))$. La dérivée par rapport à F donne $\frac{\partial L}{\partial F} = 1 - \lambda = 0$. Nous pouvons en déduire que la contrainte doit être liante : $F^* = v(x_1^*)$, et donc $U(x_1^*, F^*) = 0$

- Nous avons aussi $\frac{\partial L}{\partial x1} = - c + \lambda v'(x_1) = 0$, ce qui donne $v'(x^*_1) = c$

- **La solution est efficace** au sens où tout le surplus potentiel est réalisé (la quantité produite est la même que celle que le planificateur aurait produite)

- **Le monopoleur accapare tout le surplus**



En (0,0), la droite d'isoprofit a pour équation : $F - cx_1$ (et $F = - x_2$). Cela explique pourquoi la pente est - $\frac{1}{c}$

Le monopoleur préfère B à A à C

En M : si le monopoleur propose, soit W soit rien : le monopoleur fait un profit max sous la contrainte que le consommateur accepte (U=0)

- Plusieurs tarifications différentes peuvent mener à la solution dont une tarification avec un abonnement et un prix constant de c, ou un contrat à prendre ou à laisser (x_1^*, F^*)

V. Plusieurs consommateurs, un monopoleur, information complète

- Plusieurs consommateurs : supposons qu'ils sont de deux types

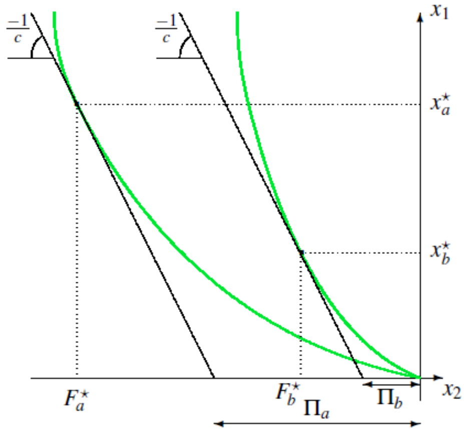
- Supposons que l'on peut ordonner les consommateurs selon leur goût pour le bien 1 : $U(x_1,x_2) = gv(x_1) + x_2$

- Les deux types : $g_a > g_b$

- La volonté à payer des a est toujours supérieure à celles des b ; c'est la condition de single crossing qui revient à dire que :

- Les courbes d'indifférence de deux agents aux goûts différents se croisent au plus une fois
- Tous les consommateurs peuvent être rangés selon une seule dimension
- Le taux marginal de substitution d'un consommateur est en tout point supérieur (ou, en tout point inférieur) à celui d'un autre consommateur

- Comme l'information est complète, le monopoleur peut proposer **deux contrats différents** (x_a,F_a) et (x_b,F_b) aux deux types d'agents, comme s'il faisait affaire avec les agents a et les agents b séparément. Il suffit donc de **répliquer** la solution précédente



- De nouveau, plusieurs systèmes de tarification permettent d'atteindre cet objectif, notamment une double tarification à prendre ou à laisser

- Avec le système de tarification à abonnement et prix constant, il faut que $p = c$ pour chacun de deux contrats (le profit = l'abonnement, le prix constant éponge les coûts)

- **La solution est efficace** : tout le surplus potentiel est créé

- **Tout le surplus est accaparé par le monopoleur**

- La solution est généralisable à **plus de deux** agents

- Qu'arriverait-il si le monopoleur proposait ces deux menus mais ne pouvait observer les paramètres de préférences (c'est-à-dire ne parvenait pas à distinguer les agents a et b) ? Les agents de type a pourraient se faire passer pour des agents de type b. ils consommeraient moins, mais payeraient tellement moins qu'ils s'en trouveraient mieux (le contrat est sur une CI plus haute)

VI. Plusieurs consommateurs, un monopoleur, info incomplète

1) Hypothèses

- On suppose que le monopoleur est incapable de distinguer les agents de type a des agents de type b mais connait la **probabilité** de faire face à un consommateur de chaque type, qa et qb respectivement

- Un consommateur de type a peut **se faire passer pour un consommateur de type b** (et le contraire est vrai aussi). C'est un cas d'**anti-sélection** (adverse selection)

- Supposons que le monopoleur se limite aux offres à prendre ou à laisser (c'est sans perte de généralité), (x_a^i, F_a^i) et (x_b^i, F_b^i)

- Le monopoleur est en situation d'incertitude. Supposons qu'il est **neutre au risque**[21]

2) Maximisation

- Son objectif est de maximiser : $\pi = q_a(F_a^i - cx_a^i) + q_b(F_b^i - cx_b^i)$

- Quelles sont les contraintes
    - Il doit tenir compte de deux contraintes de participation (CP)
      $$U_a(x_a^i, - F_a^i) = g_a v(x_a^i) - F_a^i \geq U_a(0,0) = 0$$
      $$U_b(x_b^i, - F_b^i) = g_b v(x_b^i) - F_b^i \geq U_b(0,0) = 0$$

$(x_a^i, - F_a^i)$ est donc le contrat pour les agents de type a et $(x_b^i, - F_b^i)$ le contrat pour les agents de type b

    - Il doit aussi tenir compte de l'incitant que des consommateurs d'un type pourraient avoir avoir de se faire passer pour des consommateurs d'un autre type. En d'autres termes, il faut que chaque consommateur soit d'accord de prendre le contrat qui lui est destiné. Ce sont les contraintes de compatibilité avec les incitants (CI)
      $$U_a(x_a^i, - F_a^i) \geq U_a(x_b^i, - F_b^i)$$
      $$U_b(x_b^i, - F_b^i) \geq U_b(x_a^i, - F_a^i)$$

- Ce problème peut être simplifié

    - Si la contrainte de participations des agents de type b (« les plus difficiles ») est satisfaite, elle l'est aussi pour les agents de type a

[21] Cela signifie qu'il fait face à un très grand nombre de consommateurs. La répartition réelle sera donc très proche de la probabilité. Il est certain qu'il aura une proportion q_a d'agents de type a et q_b d'agents de type b

- En effet, par la contrainte de CI

  $U_a(x_a^i, - F_a^i) \geq U_a(x_b^i, - F_b^i)$
- Par le fait que $g_a > g_b$

  $U_a(x_b^i, - F_b^i) \geq U_b(x_b^i, - F_b^i)$
- Par la CP des agents b

  $U_b(x_b^i, - F_b^i) \geq 0$
- Et donc logiquement par transitivité

  $U_a(x_a^i, - F_a^i) \geq 0$
- Ce qui signifie donc que la CP des agents a est satisfaite

  - Les agents a peuvent avoir intérêt à se faire passer pour des agents b, mais pas le contraire (vous n'avez jamais intérêt à essayer de faire croire à un monopoleur que votre volonté à payer pour le bien qu'il vend est supérieure à sa valeur réelle)

- Le problème devient : max $q_a(F_a^i - cx_a^i) + q_b(F_b^i - cx_b^i)$ sous les contraintes

$$g_b v(x_b^i) - F_b^i \geq 0$$

$$g_a v(x_a^i) - F_a^i \geq g_a v(x_b^i) - F_b^i$$

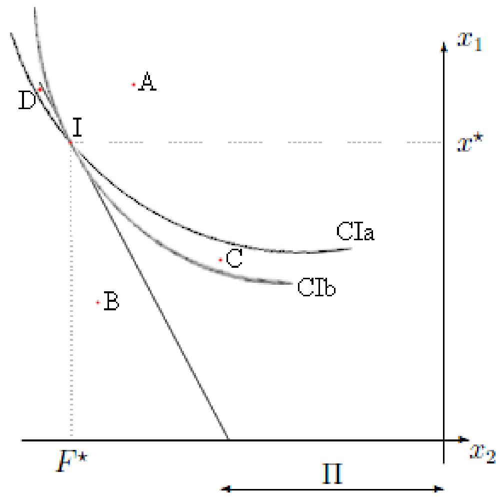
3) Trois cas

- Est-il possible que la solution consiste pour le monopoleur à n'offrir qu'un contrat à prendre ou à laisser (x^i, F^i) ?

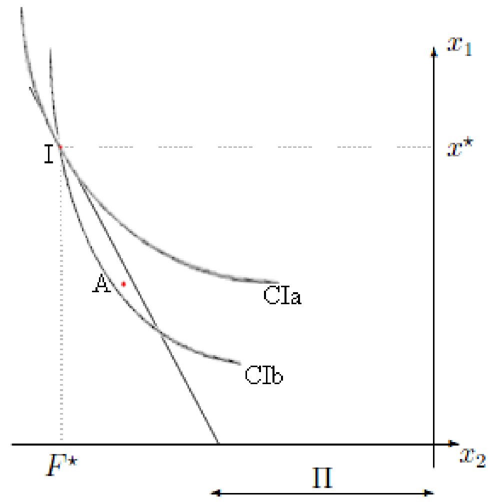
- Il y a trois cas à considérer
  - Les volontés à payer des deux types d'agents sont supérieures à c (et donc, celle des agents a est strictement supérieure)
  - Les volontés à payer des deux types d'agents sont inférieures à c (et donc, celle des agents b est strictement inférieures)
  - La volonté à payer des agents a est supérieure à c et celle des agents b inférieure, l'une des deux strictement.

A. Graphiquement[22]

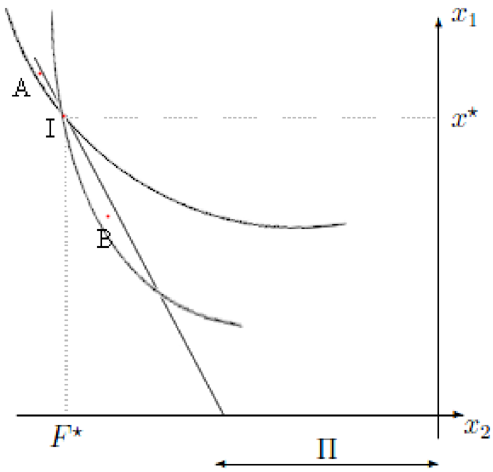
[22] Le point considéré est préféré à I ssi il se trouve sur une courbe d'indifférence plus haute. Le profit sera plus élevé ssi le point est à droite de la droite d'isoprofit.



- Cas 1 : la pente des deux CI est plus faible que la pente de la droite d'isoprofit
  - A : est préféré à I par a et b. Le profit est moins élevé qu'en I
  - B : n'est préféré à I ni par a ni par b. Le profit est plus élevé qu'en I
  - C : est préféré à I par b mais pas par a. Le profit est moins élevé qu'en I
  - D : est préféré à I par a mais pas par b. Le profit est plus élevé qu'en I
  - Le monopoleur augmente donc son profit en proposant 2 contrats (I et D)



- Cas 2 : La pente des deux CI est plus forte que la pente de la droite d'isoprofit
  - a garde le contrat I. Le profit ne change pas
  - b prend le contrat A. le profit est augmenté



- Cas 3 : La pente de Cia est plus faible que la pente de la droite d'isoprofit tandis que la pente de la Cib est plus forte
    - a prend le contrat A. Le profit est augmenté
    - b prend le contrat B. Le profit est augmenté

- Dans tous les cas, il est préférable pour la firme d'offrir plusieurs contrats (un contrat par type d'agents)

B. *Conclusion*

- Dès que les agents a sont prêts à payer plus que c, il est profitable de leur proposer un contrat spécifique (x_a^i, F_a^i) avec $x_a^i > x^i$ et $F_a^i > F^i + c\,(x_a^i - x^i)$
- Le même type de raisonnement tient lorsque les agents b sont prêts à payer moins que c

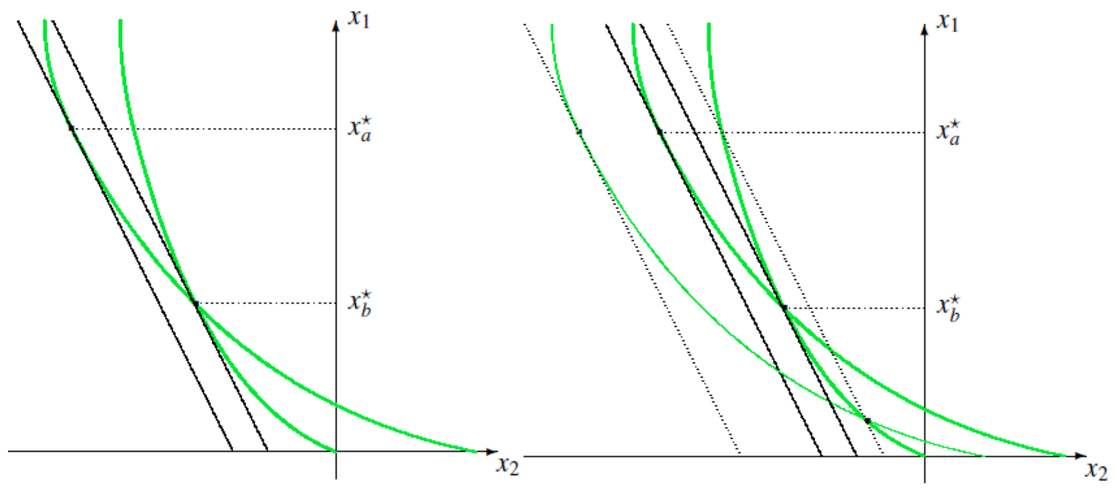
- Ceci démontre que, sous nos hypothèses, **il n'est jamais optimal pour le monopoleur de n'offrir qu'un contrat.** Pour le dire autrement, l'équilibre ne peut pas être mélangeant

- Par conséquent, un monopoleur rationnel devrait **offrir autant de contrats différents qu'il a de types de consommateurs**

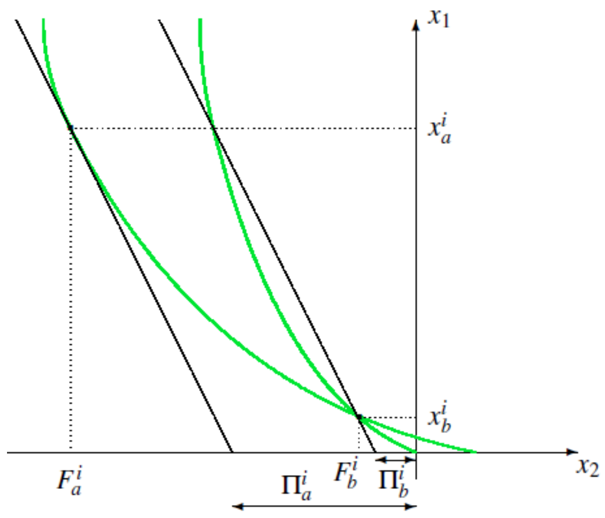
- Nous devons donc chercher **deux** contrats optimaux (x_a^i, F_a^i) et (x_b^i, F_b^i) différents

- Un **candidat** à l'équilibre serait : $x_a^i = x_a^*$, $x_b^i = x_b^*$, $F_b^i = F_b^*$ et F_a^* serait calculé pour que la contrainte de CI soit juste satisfaite

- Graphiquement



- Il est **impossible** que ce soit la tarification optimale. Le monopoleur **peut augmenter son profit** en modifiant sa politique comme suit.
  - Il diminue x_b^i, et donc F_b^i ; il prélève ainsi moins de surplus sur les agents b
  - Ce faisant, il diminue l'envie qu'on les agents a de se faire passer pour des agents b
  - Il peut donc augmenter le prix payé par les agents a, et accaparer une plus grande part de leur surplus
  - Au total, en fonction de la proportion d'agents a et b, il augmente le profit total (il perd du profit sur b mais en gagne sur a)
- Graphiquement, les **contrats optimaux** ont la forme suivante



4) Démonstration algébrique

L'objectif du monopoleur est de :

$$\max q_a(F_a^i - cx_a^i) + q_b(F_b^i - cx_b^i)$$

Sous les contraintes :

$$g_b v(x_b^i) - F_b^i \geq 0$$

$$g_a v(x_a^i) - F_a^i \geq g_a v(x_b^i) - F_b^i$$

Le Lagrangien vaut :

$$L = q_a(F_a^i - cx_a^i) + q_b(F_b^i - cx_b^i) - \lambda\,(F_b^i - g_b v(x_b^i)) - \mu\,(g_a v(x_b^i) - F_b^i) - (g_a v(x_a^i) - F_a^i))$$

Les conditions du premier ordre sont :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_a^i} &= -q_a c - \mu(-g_a v'(x_a^i)) = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial x_b^i} &= -q_b c - \lambda(-g_b v'(x_b^i)) - \mu(g_a v'(x_b^i)) = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial F_a^i} &= q_a - \mu = 0 \\
\frac{\partial L}{\partial F_b^i} &= q_b - \lambda - \mu(-1) = 0
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mu = qa$$

$$\lambda = qa + qb = 1$$

$g_a v'(x_a^i) = c$: c'est-à-dire que la quantité achetée par les agents a est celle qui maximise leur surplus

Il reste à trouver la valeur de x_b^i, à partir de

$$-q_b c - (-g_b v'(x_b^i)) - q_a(g_a v'(x_b^i)) = 0$$

D'où

$$g_b v'(x_b^i)(1 - \frac{q_a g_a}{g_b}) = q_b c$$

Et

$$g_b v'(x_b^i) = c\frac{q_b}{1 - q_a\frac{g_a}{g_b}} > c$$

Puisque $\frac{ga}{gb} > 1$, de sorte que $1 - qa\,\frac{ga}{gb} > 1 - qa = qb$, la fraction qui multiplie c est supérieure à 1

Si $1 - qa\,\frac{ga}{gb} \leq 0$, alors nous avons une solution de coin avec $x_b^i = 0$

Combien les consommateurs vont-ils payer ? Nous savons que les deux contraintes sont liantes

$g_b v(x_b^i) - F_b^i = 0$, ce qui donne la valeur que les agents b payent : $F_b^i = g_b v(x_b^i)$

$g_a v(x_a^i) - F_a^i = g_a v(x_b^i) - F_b^i$, ce qui donne la valeur que les agents a payent :

$$F_a^i = g_a(v(x_a^i) - v(x_b^i)) + F_b^i$$

Supposons que $x_b^i > 0$. Alors, $g_a v(x_b^i) > g_b v(x_b^i)$, et donc $g_a v(x_b^i) > F_b^i$, de sorte que $F_a^i < g_a v(x_a^i)$: les agents a payent moins que si l'information était complète. Ils voudraient bien payer plus mais il n'est pas dans l'intérêt du monopoleur d'augmenter l'offre.

5) En conclusion

- Nous venons de démontrer que la solution optimale présente les caractéristiques suivantes
  - Il y a deux contrats (autant que de types d'agents). L'équilibre est dit séparant. Cela signifie que, ex post, l'information (= le type d'agent = le goût pour le bien produit) est révélée !
  - La **quantité** achetée par les agents a (ceux qui ont la volonté à payer pour le bien la plus élevée) est la **même** que si le monopoleur avait toute l'info
  - Par contre, les **prix** qu'ils payent est **moindre** que si l'info était complète. Ces agents sont donc strictement **mieux** quand l'info est incomplète. Ils bénéficient d'une rente informationnelle
  - La **quantité** achetée par les agents b (dont le goût pour le bien produit est moins prononcé) est plus **petite** que si l'info était complète. Leur demande est volontairement distordue par le monopoleur, avec comme conséquence que le surplus créé lors de cette transaction est moindre que si le monopoleur observait les goûts
  - Par contre, les agents b **payent moins**, et leur **utilité** n'est **pas affectée** par l'asymétrie de l'info.
  - Le surplus total est moindre que si l'info était complète (en raison de la distorsion). On dit alors que cette solution est optimale de second rang (le vendeur ne peut pas faire mieux mais ce n'est pas la mieux possible dans le meilleur des mondes), contrairement à la solution optimale de premier rang obtenue quand l'info est complète.

VII. Concurrence parfaite

- Supposons que les firmes sont si nombreuses que leurs profits sont nuls donc elles ne peuvent rien faire d'autre que de proposer $p = c$ (« price takers »)

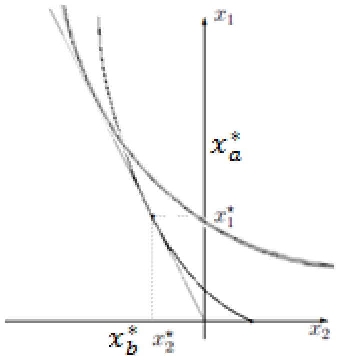
- Faisant face à ce prix, les agents **choisissent librement leurs quantités** et demanderont x_a^* et x_b^* qui maximisent $g_a v(x_a) - cx_a$ et $g_b v(x_b) - cx_b$ respectivement, et qu'ils payeront respectivement cx_a^* et cx_b^*

- Cet équilibre est **efficace et séparant**, le surplus est maximal

- Tout le surplus est accaparé **par les consommateurs**

- Que les producteurs soient informés ou pas des goûts de leurs clients n'a pas d'importance : **l'info est devenue non pertinente**

- La plupart des marchés réels ne sont ni monopolistiques, ni en concurrence parfaite. Ce que l'on déduire de ce qui précède, **c'est que plus il y a** de la **concurrence**, plus le surplus est distribué vers les consommateurs**, plus** le **surplus** total est élevé, et **moins** l'**asymétrie** de l'information **importe**



VIII. Applications

- Pourquoi observe-t-on que certaines tarifications proposent un prix marginal largement supérieur au coût marginal, ce qui pousse manifestement certains consommateurs à consommer moins que si le tarif reflétait le coût marginal ?
    - Si la disposition à payer pour le bien ou service n'est pas observable, il peut être profitable pour la firme de diminuer la quantité achetée par les acheteurs au pouvoir d'achat le plus faible pour éviter que les autres acheteurs se fassent passer pour des « petits » acheteurs
    - La firme peut donc obtenir un profit plus important grâce au tarif plus élevé qu'elle parvient ainsi à imposer aux acheteurs dont la disposition à payer est la plus élevée

- Pourquoi la qualité de certains biens est-elle manifestement plus basse que ce qui pourrait être offert à un prix à peine plus élevé ?

- Exemples :
    - Pourquoi y a-t-il une telle différence de confort entre les premières classes et les deuxièmes classes (alors que les aménagements des deuxièmes classes ne seraient pas si coûteux)
    - Pourquoi les logements sociaux sont-ils de si « mauvaise » qualité ?
    - Dans tous ces exemples, en augmentant la qualité du bien, on amène **deux choses** : la volonté à payer des « petits » consommateurs augmente avec l'augmentation de la qualité du bien, ce qui est positif pour le profit. MAIS, cela crée aussi un incitant pour les « grands » consommateurs à prendre le contrat destiné aux « petits » consommateurs, ce qui diminue le profit. En clair, les personnes qui iraient en première classe vont aller en seconde classe parce que la différence de qualité n'est plus énorme.

IX. Résumé

- Asymétrie d’information, (fonction d’utilité quasi-linéaire), anti-sélection, contrainte de participation, contrainte de compatibilité avec les incitants, rente informationnelle, équilibre mélangeant ou séparant, distorsion, solution optimale de premier et de second rang

- Tout équilibre est séparant

- Les agents possédant la « bonne » information (ici, ceux qui sont prêts à payer le plus pour le bien) obtiennent une rente informationnelle

- Les agents possédant la « mauvaise » information ne sont pas affectés par l’asymétrie d’information en terme de bien-être, mais, par contre, il y a une distorsion de la quantité qu’ils achètent

- L’asymétrie d’information entraine une perte de surplus total

- En concurrence parfaite, l’équilibre est efficace, tout le surplus est accaparé par les consommateurs, et l’information dont disposent les producteurs devient non-pertinente

Chapitre 4 : Equilibre général

I. Introduction

1) Définition

- L’équilibre général est l’étude de la fixation simultanée de tous les prix sur tous les marchés
  - Est-ce que la liberté d’échange mène **à l’ordre ou au chaos** ?
  - Comment peut-on **expliquer** l’usage des marchés ?
  - Peut-on **justifier normativement** les marchés ?
  - Théorie des **prix**

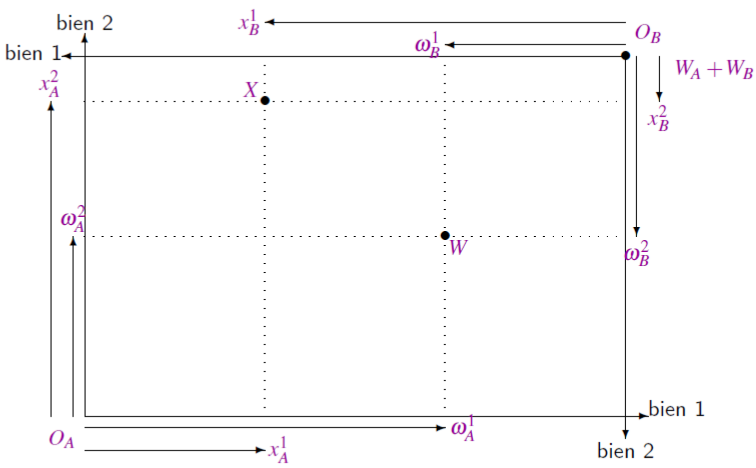
- Hypothèses simplificatrices :
  - Échange pur (pas de production mais cela ne change rien aux conclusions, c’est juste plus facile).

- Deux agents, A et B
- Deux biens, 1 et 2

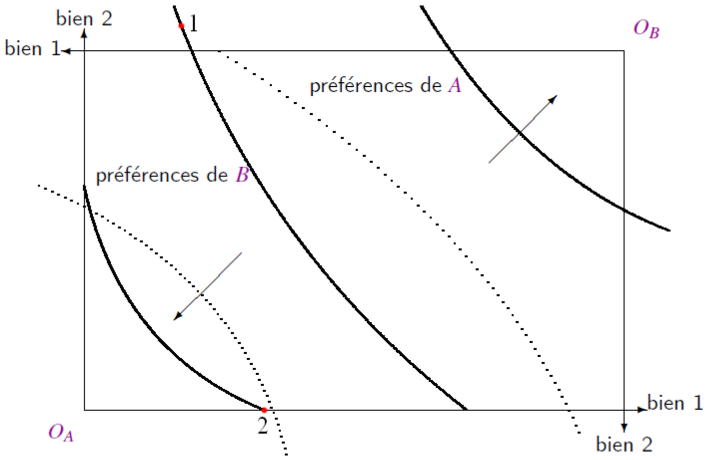
- <u>Les agents</u> :
  - Dotations : $W = (W_A, W_B) = ((\omega_A^1, \omega_A^2), (\omega_B^1, \omega_B^2))$
    - W est un vecteur à 4 dimensions. C'est la situation avant échange
  - Préférences sur les paniers de biens : $X_A = ((x_A^1, x_A^2)$ et $X_B = (x_B^1, x_B^2))$

- <u>L'économie</u> :
  - Allocation : $X = (X_A, X_B) = ((x_A^1, x_A^2), (x_B^1, x_B^2))$
    - X est un vecteur à 4 dimensions. C'est la situation après échange
  - Réalisable :
    - On consomme ce qui est disponible. On fait l'hypothèse que les biens sont désirables, les préférences sont donc monotones. Consommer plus est mieux, on consomme tout.
    - $x_A^1 + x_B^1 = \omega_A^1 + \omega_B^1$
    - $x_A^2 + x_B^2 = \omega_A^2 + \omega_B^2$

2) Outil de représentation : Boite d'Edgeworth



Chaque point de la boite est en fait un vecteur à 4 dimensions
Ici, B a reçu du bien 1 ($x > \omega$) et a vendu du bien 2



Le panier de bien 1 n'existe pas dans la société mais est évalué par A
2 correspond à la contrainte de non-négativité de A

- L'échange :
  - Passage de W à X
  - On considère l'échange **marchand**[23]
  - Il se fait selon un **prix**, le même pour tout le monde et quel que soit les quantités

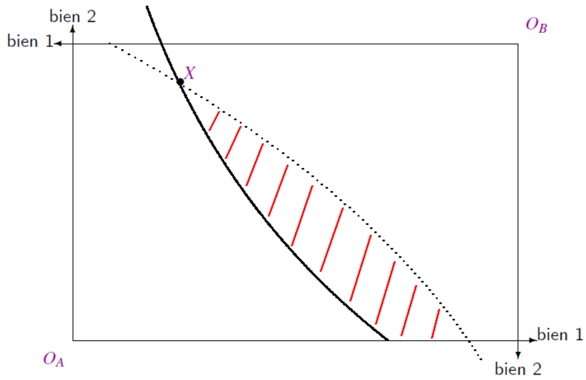
- Etant donné les dotations et les préférences, comment peut-on **prévoir** l'allocation qui résultera de l'échange marchand ?

II. L'efficacité au sens de Pareto

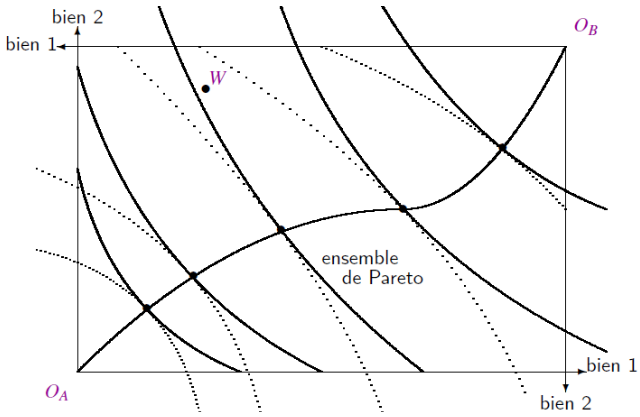
- Définition : une allocation est efficace au sens de Pareto s'il n'en existe pas d'autre que tous les agents préfèrent
  - … s'il est impossible d'augmenter la satisfaction d'un agent **sans diminuer** celle d'un autre
  - … s'il n'y a pas de **gaspillage** de satisfaction[24]
  - … si tous les gains d'échange ont été **exploités**
  - … s'il n'est plus possible d'effectuer des échanges **mutuellement avantageux**

- C'est une norme et un principe d'explication (cela explique pourquoi on a créé certaines institutions)

[23] Échange sur les marchés, on ne considère pas le troc, etc.
[24] Notons que dans la boite d'Edgeworth : à tout point, il n'y a pas de gaspillage au point de vue des biens. Tout ce qui est produit est consommé. Mais il peut y avoir gaspillage de satisfaction.



X n'est pas efficace : tout point dans la zone hachurée est préféré par les deux agents.
Les courbes doivent être tangentes



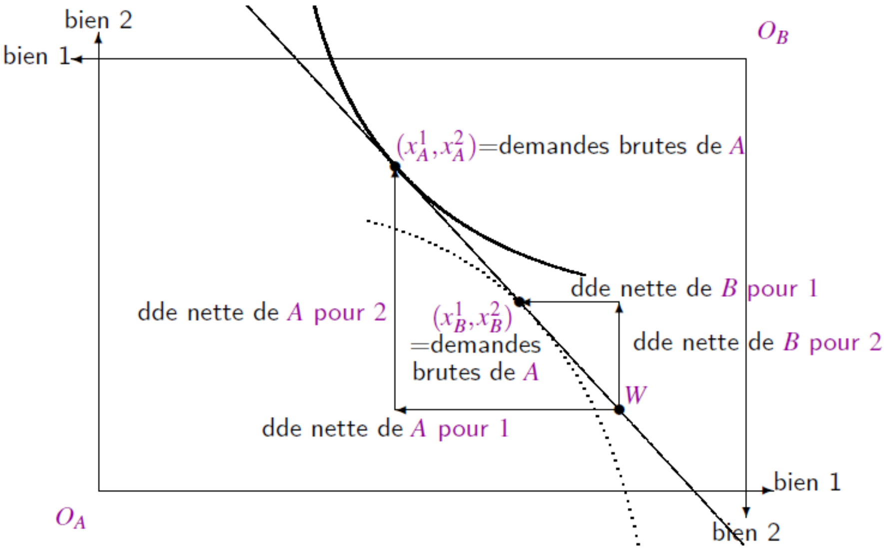
Au point totalement au sud-ouest, B consomme tout.
Ce point est efficace car il est possible d'augmenter la satisfaction de A MAIS pas sans diminuer celle de B.
Ce point est donc efficace mais pas nécessairement désirable

III. L'échange marchand

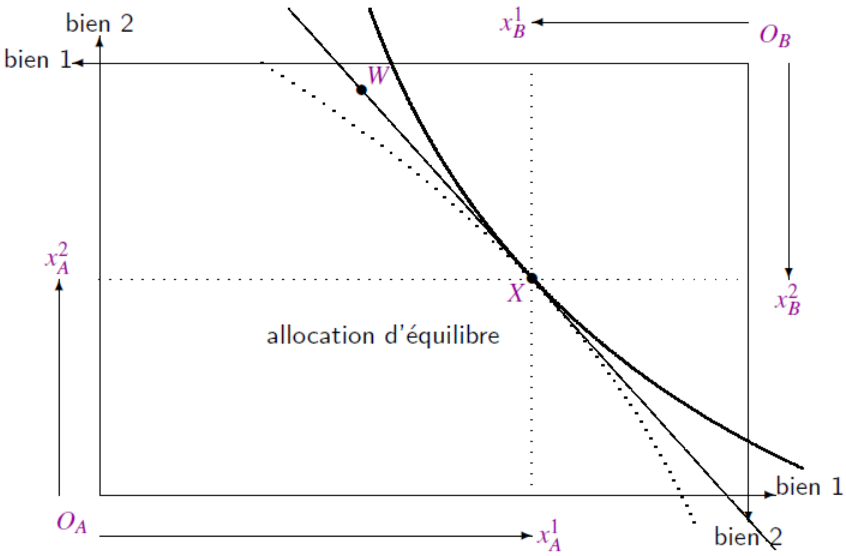
- Supposons maintenant qu'il existe des marchés où les biens 1 et 2 peuvent être échangés

- Supposons que les agents se comportent de manière **concurrentielle** : ils prennent les prix pour donnés.
    - Un vecteur de **prix** : (p_1,p_2)
    - La **demande brute** de chaque agent : (x_A^1, x_A^2) et (x_B^1, x_B^2)
    - La contrainte budgétaire :
        - $p_1 x_A^1 + p_2 x_A^2 = p_1 \omega_A^1 + p_2 \omega_A^2$
        - $p_1 x_B^1 + p_2 x_B^2 = p_1 \omega_B^1 + p_2 \omega_B^2$
    - La **demande nette (ou excédentaire)** : $e_A^1 = x_A^1 - \omega_A^1$
        - Si $e_A^1 \neq - e_B^1$ ou si $e_A^2 \neq - e_B^2$, alors le marché est en déséquilibre

- Si $e_A^1 = - e_B^1$ et si $e_A^2 = - e_B^2$, alors le marché est en équilibre général : on parle d'équilibre de marché, concurrentiel ou walrasien
- Notons que la demande nette peut être négative :
  - $> 0 \rightarrow$ achat
  - $< 0 \rightarrow$ vente



Ici, le marché est en déséquilibre : les demandes excédentaires ne sont pas opposées



Ici, le marché est en équilibre, les demandes excédentaires sont opposées

$\rightarrow$ La courbe des CI doit être opposée, elles doivent être symétriques

IV. Algèbre de l'équilibre : la loi de Walras

- Soit x_A^1 (p_1, p_2), x_A^2 (p_1, p_2), x_B^1 (p_1, p_2) et x_B^2 (p_1, p_2), les demandes brutes de l'agent A pour le bien 1, de l'agent A pour le bien 2, etc.

- Le vecteur de prix d'équilibre, (p_1^*, p_2^*), est tel que

$$x_A^1(p_1^*, p_2^*) + x_B^1(p_1^*, p_2^*) = \omega_A^1 + \omega_B^1$$
$$x_A^2(p_1^*, p_2^*) + x_B^2(p_1^*, p_2^*) = \omega_A^2 + \omega_B^2$$

Pour chaque bien : la quantité totale dépensée (ou consommée) = la quantité dispo

- Si on définit les demandes excédentaires agrégées

$$z_1(p_1,p_2) = e_A^1(p_1, p_2) + e_B^1(p_1, p_2)$$
$$z_2(p_1,p_2) = e_A^2(p_1, p_2) + e_B^2(p_1, p_2)$$

- Alors les prix d'équilibre peuvent être définis comme (p_1^*, p_2^*) tels que

$$z_1(p_1^*, p_2^*) = 0$$
$$z_2(p_1^*, p_2^*) = 0$$

- Peut-on avoir une égalité et pas l'autre ?

- Les équations budgétaires : pour tout (p1,p2)

$$p_1 x_A^1(p_1, p_2) + p_2 x_A^1(p_1, p_2) = p_1\omega_A^1 + p_2\omega_A^1$$
$$p_1 x_B^2(p_1, p_2) + p_2 x_B^2(p_1, p_2) = p_1\omega_B^2 + p_2\omega_B^2$$

- Ou

$$p_1 e_A^1(p_1, p_2) + p_2 e_A^1(p_1, p_2) = 0$$
$$p_1 e_B^2(p_1, p_2) + p_2 e_B^2(p_1, p_2) = 0$$

- En sommant les deux équations :

$$p_1 z_1 (p_1,p_2) + p_2 z_2(p_1,p_2) = 0$$

La valeur monétaire de la demande excédentaire agrégée est toujours nulle (loi de Walras)

- Par conséquent, si $p_1 > 0$ et $p_2 > 0$

$$z_1 (p_1,p_2) = 0 \leftrightarrow z_2(p_1,p_2) = 0$$

Si un des termes de la somme vaut 0, « son marché » est en équilibre
Si un des termes de la somme vaut 0, l'autre terme aussi
Donc, il ne peut y avoir équilibre sur un marché et pas sur l'autre

- Conséquences :
  - Il y a une **interdépendance** générale des marchés
  - D'où l'intérêt de la **comptabilité nationale**
  - S'il y a k biens, il y a $k - 1$ conditions d'équilibre
  - Seuls les **prix relatifs** importent[25]

V. Existence de l'équilibre

- Dans quelles économies un équilibre existe-t-il ?

- Si :
  - Les préférences sont **convexes** ou
  - Chaque consommateur est **petit** dans la population
- Alors, la fonction de demande excédentaire agrégée est **continue**

- Si la fonction de demande agrégée est continue, alors un **équilibre existe**

- S'il y a équilibre, il y a ordre. S'il y a déséquilibre, il y a désordre
  - Cependant, il peut y avoir équilibre mais en même temps des **turbulences**
  - Au-delà du déséquilibre, il faut voir la stabilité (>< chaos)

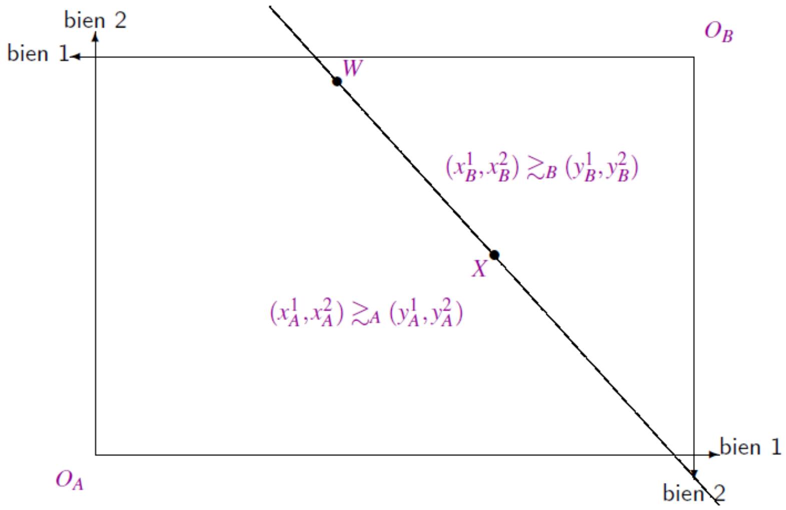
VI. Efficacité de l'équilibre

- L'équilibre concurrentiel est-il efficace au sens de Pareto ?

- Soit une allocation d'équilibre $((x_A^1, x_A^2), (x_B^1, x_B^2))$. Existe-t-il une autre allocation $((y_A^1, y_A^2), (y_B^1, y_B^2))$ telle que
  - $(y_A^1, y_A^2) \succ (x_A^1, x_A^2)$
  - $(y_B^1, y_B^2) \succ (x_B^1, x_B^2)$?

- Graphiquement

[25] Le rapport des prix entre-eux



Il est impossible de trouver un Y préféré par A et B à la fois. X est donc nécessairement efficace

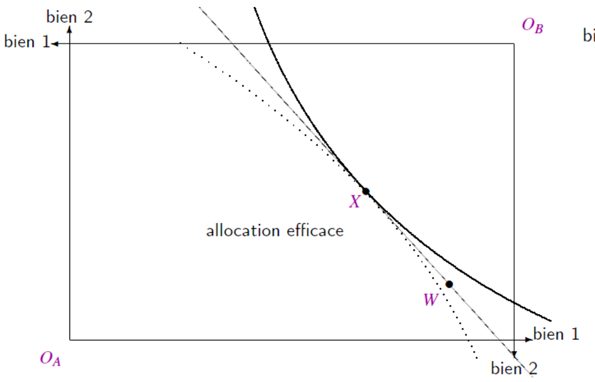
- Tout équilibre, s'il existe, est efficace au sens de Pareto[26]
  - C'est une **explication positive** de l'existence des marchés
    - Si les marchés amenaient des résultats non-optimaux, ils n'auraient pas été inventés
  - Il amène aussi des **justifications normatives** à l'existence des marchés
    - Le marché est un moyen d'obtenir l'efficacité
  - Théorie des prix : les prix dirigent l'économie vers une allocation efficace. Les prix donnent la valeur sociale des biens (prix du bien équilibre concurrentiel), leur rareté/utilité
  - **Socialisme de marchés**
  - « Les économistes **supposent** que les marchés sont bons »
    - Non, ce n'est pas une hypothèse. C'est un théorème
    - Ce n'est pas un point de départ mais un point d'arrivée
  - Les hypothèses **explicites** sont très faibles
  - Les hypothèses **implicites** sont nombreuses
    - Le marché doit être concurrentiel
    - Il n'y a pas de pollution
      - Le fait que b achète ne nuit pas à a
      - S'il y a pollution, le principe de marché est inefficace
    - Le marché doit être complet
      - On ne peut pas acheter des biens futurs
      - Cette hypothèse est contournée par les marchés financiers

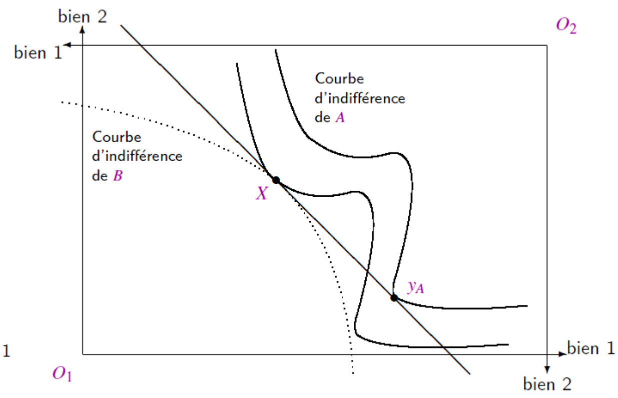
VII. Équilibre et efficacité

[26] Premier théorème fondamental de l'économie du bien-être

- Toute allocation efficace au sens de Pareto peut-elle être obtenue comme un équilibre compétitif (être décentralisée) ?

- <u>Graphiquement</u> :





- <u>A gauche</u> :
  - Il y a un budget d'équilibre qu'A et B vont choisir car les préférences sont convexes
  - Il suffit que la dotation W soit sur la droite de budget pour que les agents échangent jusqu'à arriver à X
- <u>A droite</u> :
  - X est un équilibre au sens de Pareto car il est impossible d'augmenter le bien-être de A sans diminuer celui de B
  - Cependant, A va choisir de lui-même une autre allocation que X (y_A est sur une CI supérieure)

- **Deuxième théorème fondamental** : si les préférences sont **convexes**, toute allocation efficace au sens de Pareto peut être décentralisée
  - Si on ajoute la **production**, d'autres conditions s'ajoutent
  - S'il y a beaucoup d'agents différents, la non-convexité tend à disparaitre
  - <u>Interprétation initiale</u> : les questions d'**efficacité** et d'**équité** peuvent être **dissociées**. Quelle que soit la notion d'équité, elle est compatible avec les marchés[27]. Il suffit de **redistribuer les dotations**.
    - Le marché permet l'efficacité
    - La redistribution des dotations permet l'équité
  - <u>Interprétation nuancée</u> : les échanges révèlent de l'**information** pertinente pour la redistribution
    - C'est en laissant les gens échanger qu'on sait comment distribuer les droits de propriété
    - Ceux-ci doivent être distribués avant l'échange

[27] Si toutefois elle est compatible avec la notion d'efficacité au sens de Pareto

        - → impossible → le deuxième théorème fondamental peut être abandonné
    - <u>Conclusion</u> : en général, il faut préférer une redistribution des dotations à une manipulation des prix
        - Exemple : fixer le loyer pour certaines personnes = manipulation des prix = s'éloigner de l'efficacité.
    - Les pères de la théorie de l'équilibre général : Arrow et Debreu

VIII. Résumé

- Demande brutes, nettes, excédentaires, individuelles et agrégées ; efficacité au sens de Pareto
- Loi de Walras. Théorie de l'équilibre général : théorème d'existence, premier et second théorèmes fondamentaux de l'économie du bien-être
- Un équilibre existe en général
- Un équilibre est efficace
- Une allocation efficace peut être décentralisée
- Hypothèses de la théorie : (convexité des préférences), pas de pollution, marchés complets, comportement concurrentiel